1. A Výroky a operácie s výrokmi. Negácia kvantifikovaných a zložených výrokov.

1. Rozhodnite o pravdivosti:
   a) Číslo 121 je druhou mocninou prirodzeného čísla.
   b) Existuje aspoň jedno párne prvočíslo.
   c) Riešením rovnice $(x-3)^2 = (x+2)^2 + 1$ je číslo x_1, pre ktoré platí, že $x_1 \geq 0{,}4$.
   d) $\sqrt{63} < 8 \vee \sqrt{63} = 8$
   e) $3/36 \wedge 4/36$
   f) $\left(\frac{1}{2} < \frac{3}{4}\right) \wedge \left(\frac{3}{4} < \frac{4}{5}\right)$
2. Určte negáciu:
   a) Číslo 9102 je deliteľné dvomi a tromi.
   b) Nikto nefajčí.
   c) Každý deň je dôvod k radosti.
   d) Rovnici $\frac{x^2+7x+10}{x^2-6x+8} < 0$ nevyhovuje žiadne prirodzené číslo.
3. Daným výrokom priraďte pravdivostnú hodnotu:
   a) Pre objem V a plášť Q každého rotačného kužeľa platí:

      $\left(V = \frac{1}{3}\pi\, r^2 v\right) \wedge \left(Q = \pi\, r\, v\right)$
   b) Pre každé prirodzené číslo $x = 2n(2n+1)(2n+2)$, kde $n \in N$ platí, $4 / x$ alebo $5 / x$.
   c) Pre trojuholník, v ktorom $a = 5$ jednotiek dĺžky, $b = 4$ j. dĺžky, $\gamma = 60°$ platí pre obsah trojuholníka $S = 10\sqrt{3}$ j. dĺžky^2.
4. Overte nasledujúce tvrdenia:
   a) Rovnica $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ má tri celočíselné riešenia.
   b) Výška pravouhlého trojuholníka $v = 4$ cm delí preponu na 2 úseky $c_1 = 2$ cm, $c_2 = 7{,}5$ cm.
   c) Postupnosť $\left\{\frac{2n+1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca.
5. Určte negáciu:
   a) Nikto nie je doma.
   b) $\exists\, n \in N;\ n^2 < 0$

c) Všetky násobky čísla 7 sú aj násobkami čísla 5.

d) Práve traja žiaci sú chorí.

e) $(4^3 = 2^{5)} \vee (4 > 2^2)$

6. Určte pravdivostnú hodnotu a negáciu výrokov:

a) $\binom{10}{3} = 120 \wedge \binom{10}{3} + \binom{10}{4} = \binom{11}{3}$

b) $6 / 231 \vee 9 / 231$

c) $x \in \mathrm{R}; |5 - x| < 0$

d) Definičným oborom funkcie $y = \log |x - 5|$ sú všetky reálne čísla.

7. Zistite, či formula je tautológia:

$(A \vee B') \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$

8. Určte obmeny viet a ich negácie:

a) $n \in N; 5 / n \Rightarrow 5 / n^2$

b) $n \in N; (3 / n \wedge 2 / n) \Leftrightarrow 6 / n$

c) Ak ľubovoľná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu, tak je ohraničená.

1. B Exponenciálne a logaritmické rovnice.

Riešte v R:

1. $\log_2(x+14)+\log_2(x+2)=6$
2. $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7$
3. $\left(\frac{4}{9}\right)^x\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{\log 4}{\log 8}$
4. $\log_x\sqrt{5}+\log_x(5)-2{,}25=\left(\log_x\sqrt{5}\right)^2$
5. $\left[2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}}=4$
6. $7.3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$
7. $4^{x-2}-17.2^{x-4}+1=0$
8. $3.\sqrt[x]{81}-10.\sqrt[x]{9}+3=0$
9. Riešte v R sústavu:

   $8^{2x+1}=32.2^{4y-1}$

   $5.5^{x-y}=\sqrt{25^{2y+1}}$
10. $\log\left(3^{\sqrt{4x+1}}-2^{4-\sqrt{4x+1}}\right)-2=\frac{1}{4}\log 16-\sqrt{x+0{,}25}.\log 4$
11. Riešte v R sústavu:

    $\log_x 4-\log_2 y=0$

    $x^2-5y^2+4=0$
12. $\log_2(4.3^x-6)-\log_2(9^x-6)=1$
13. $\left(\frac{9}{25}\right)^{2x}.\left(\frac{125}{27}\right)^{x-1}=\frac{\log 8}{\log 32}$

    $2^{\log_3 x^2}.5^{\log_3 x}=400$

2. A Množiny. Základné pojmy, vlastnosti a operácie s množinami, číselné množiny.

1. Dané sú množiny $A = \{x \in R;\ 1 \le (x - 5)^2 < 4\}$, $B = \{x \in N;\ 2\sqrt{x} \ge 4\}$. Určte $A \cap B$.
2. Určte definičný obor funkcie:

   $$f: y = \log_2\left(\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{8 - 2x}\right)$$

3. Množiny A, B, C, D znázornite graficky na číselnej osi a určte $A \cap C$, $B \cup D$.

   $A = \{x \in R;\ x < 2 \vee x \ge 8\}$

   $B = \{x \in R;\ x^2 \le 1\}$

   $C = \{x \in R;\ \sqrt{x^2} = x\}$

   $D = \{x \in R;\ |x + 1| > 1\}$

4. Určte $A \cap B$, $A \cup B$ ak:
   a) $A = (-2; 1>$

      $B = R^+$

   b) $A = (x \in R;\ |x| \ge 2\}$

      $B = \{x \in R,\ x^{2-}2x - 8 < 0\}$

5. Načrtnite graf karteziánskeho súčinu množín A, B ak:

   $A = \{\ x \in R,\ \frac{x-1}{x+3} \le 0\}$

   $B = \{\ y \in R,\ |y - 3| = 1\ \}$

6. Určte graficky $A \cap B$, ak:

   $A = \{[x, y] \in R^2;\ x^2 + y^2 - 4x \le 0\}$

   $B = \{[x, y] \in R^2;\ y^2 - x - 1 \le 0\}$

7. Zo sto študentov sa učilo 30 nemčinu, 28 španielčinu, 42 francúzštinu, 8 španielčinu a nemčinu, 10 španielčinu a francúzštinu, 5 nemčinu a francúzštinu, 3 všetky jazyky. Koľko študentov neštudovalo nijaký z uvedených predmetov?
8. Zo 129 študentov prvého ročníka internátnej školy chodí pravidelne do jedálne na obed alebo večeru 116 študentov, 62 študentov nechodí na obed alebo nechodí na večeru. Pritom na obedy ich chodí o 47 viac ako na večeru. Koľko z nich chodí na obedy aj večere, koľko len na obedy, koľko len na večere?

2. B Kužeľosečky. Určenie základných parametrov, zakreslenie v súradnicovej sústave.

1. Dokážte, že rovnica $9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y - 31 = 0$ je rovnica hyperboly. Načrtnite ju. Je vzdialenosť ohnísk $2\sqrt{3}$ jednotiek dĺžky?
2. Určte ohnisko, vrchol a riadiacu priamku paraboly $x^2 + 9y + 6x - 9 = 0$.
3. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza bodmi $A[-1, 3]$, $B[0, 2]$, $C[1, -1]$. Zistite jej stred a polomer.
4. Určte stred a polomer guľovej plochy danej rovnicou $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 13 = 0$.
5. Určte definičný obor, graf a obor hodnôt funkcie:

   $f : y = \sqrt{4x - x^2}$
6. Daná je funkcia $f : y = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$. Určte jej graf, definičný obor a obor hodnôt.
7. Určte graf funkcie $f : y = \sqrt{12 - 6x}$ a napíšte rovnicu dotyčnice v jeho bode $T\left[\frac{1}{2}; y_0\right]$.
8. Pre ktorú $a \in R$ je rovnica vyjadrením kružnice?

   $x^2 + y^2 - 2ax + 6y + 5a + 5 = 0$
9. Určte definičný obor a načrtnite v súradnicovej sústave graf funkcie:

   $f : y = \frac{2}{3}\sqrt{10x - x^2 - 16}$

   Je táto funkcia ohraničená?
10. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza bodmi A [3, 5], B [2, 6] a stred má na priamke $p: 2x + 3y - 4 - 0$..

3. A Reálna funkcia jednej premennej. Definičný obor, obor hodnôt, vlastnosti funkcií.

1. Daná je funkcia $f : y = \frac{\log(x^2 - 4)}{\log(3x + 6)}$. Určte jej definičný obor a zistite, či číslo 1 je funkčná hodnota.
2. Určte definičný obor funkcie $f : y = \frac{\sqrt{0{,}2^x - 0{,}04}}{x + 4}$.
3. Zistite, či funkcia $f : y = \sqrt{25 - x^2}$ je párna. Určte jej obor hodnôt.
4. Určte graf funkcie $g : y = \frac{|x|}{x}$ a popíšte vlastnosti funkcie.
5. Dané sú funkcie $f : y = 2^{4x+1} + 8$, $g: y = 17.2^{2x}$. Určte množinu tých $x \in \mathrm{R}$, pre ktoré platí $f(x) = g(x)$.
6. Určte D(f) a zistite, pre ktoré $x \in \mathrm{R}$ je $f(x) \geq 0$ ak:

   $f : y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 4x}$
7. Daná je funkcia $f : y = \frac{\sqrt{6x - x^2 - 5}}{(0{,}2)^{x-2} - 1}$. Určte jej definičný obor a zistite, pre ktoré reálne čísla nadobúda kladné hodnoty.
8. Určte definičný obor, graf a popíšte vlastnosti funkcie $f : y = \sqrt{49 - x^2}$.
9. Určte definičný obor funkcie $f : y = \sqrt{1 - \log(x - 1) + \sqrt{\frac{4 - x}{x + 2}}}$.
10. Určte definičný obor, graf a popíšte vlastnosti funkcie:

$f : y = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} - x$

3. B Rady. Využitie nekonečného geometrického radu pri riešení úloh.

1. Určte podmienku konvergencie a zistite pre ktoré $x \in R$ platí rovnosť:

   $(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3 + \ldots + (x-1)^n = 1$

2. Riešte v R rovnicu

   $$\frac{5}{3} = x + 3x^2 + x^3 + 3x^4 + x^5 + 3x^6 + \ldots$$

3. Riešte v R rovnicu

   $$1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \ldots = \frac{4x-3}{3x-4}$$

4. Zistite , či rovnici vyhovuje prirodzené číslo:

   a) $\log x + \log \sqrt{x} + \log \sqrt[4]{x} + \log \sqrt[8]{x} + \ldots = 2$

   b) $2^x + 4^x + 8^x + 16^x + \ldots = 1$

5. Zapíšte periodické čísla v tvare zlomku

   $2{,}41\overline{2}$, $0{,}2\overline{3}$

6. Zistite, pre ktoré čísla x možno určiť súčet radu a určte:

   $\sin^2 x + \cos^2 x + \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^6 x + \cos^2 x + \ldots$

7. Menší koreň rovnice $2x^2 - 5x + 2 = 0$ sa rovná prvému číslu nekonečného konvergentného geometrického radu, väčší koreň sa rovná jeho súčtu. Určte kvocient radu.

8. Daný je štvorec so stranou a. Spojnice stredov jeho strán utvoria opäť štvorec atď. až do nekonečna. Vypočítajte k akej hranici sa blíži súčet obvodov a k akej hranici súčet obsahov týchto štvorcov.

9. Riešte v R rovnicu

   $$\frac{1}{2x} + (4-3x) + (4-3x)^2 + (4-3x)^3 + \ldots = 0$$

10. Špirála sa skladá z polkružníc. Pritom polomer každej nasledujúcej je o jednu tretinu menší ako polomer predchádzajúcej polkružnice. Určite dĺžku špirály, ak polomer prvej polkružnice je r.

4. A Polynomická funkcia. Polynóm, polynomická rovnica, polynomická funkcia I. a II. stupňa.

1. Nájdite všetky kvadratické funkcie s definičným oborom R, pre ktoré platí: f(2) = 1 $\wedge$ f(– 2) = 9 $\wedge$ f(0) = 1.
2. Určte rovnicu tej kvadratickej funkcie s definičným oborom R, kde c$\in$R $\wedge$ y = x^2+6x+c, ktorej graf prechádza bodom Q [5; 5]. Aké sú priesečníky so súradnicovými osami?
3. Určte graf funkcie a popíšte vlastnosti:
   $y = |x-2| + |x+2|$
4. Daná je kvadratická funkcia y = ax^2+bx+c, kde a$\neq$0 $\wedge$ a, b, c$\in$R. Odvoďte vzťah pre súradnice vrcholu paraboly, ktorá je grafom danej funkcie. Určte obor hodnôt danej funkcie.
5. Štvorce ABCD s rozmermi 20 *x* 20 má stred v počiatku súradnicovej sústavy a strany rovnobežné s osami *x*, *y*. Akú rovnicu má parabola prechádzajúca bodmi C, D s vrcholom v strede strany AB?
6. Určte graf funkcie $f : y = \dfrac{x^3 - 4x}{x+2}$.
7. Určte graf funkcie $f : y = \dfrac{x^2 - 4}{|x-2|}$.
8. Kvadratická funkcia y = 3x^2+2px+p premennej x nadobúda pre x = 2 hodnotu y = – 3. Určte jej obor hodnôt.
9. V rovnici $x^2 - 2x + c = 0$ určte všetky $c \in R$ tak, aby jeden koreň bol prevrátenou hodnotou druhého koreňa.
10. V rovnici $9x^2 - 18tx - 8t + 16 = 0$ určte všetky $t \in R$ tak, aby jeden koreň rovnice bol dvakrát väčší ako druhý.

4. B Stereometria. Vzájomná poloha základných geometrických útvarov, určovanie prienikov, rezy útvarov rovinou, prienik priamky s povrchom kocky.

1. Určte rez kocky ABCDEFGH so stranou a = 5cm rovinou $\rho = \overleftrightarrow{MNP}$, ak M je stred hrany EF, N∈ $\overleftarrow{DC}$ tak, že |DC| : |CN| = 5:1, P∈ $\overrightarrow{FB}$ za bodom B, |FB| = 7 cm.
2. Dokážte, že uhlopriečny rez AA'CC' kocky ABCDA'B'C'D' je obdĺžnik. Určte uhol uhlopriečok.
3. Kocke je opísaná guľa s polomerom *r*. Vypočítajte povrch a objem kocky.
4. Za aký čas sa naplní nádrž tvaru kvádra, ak sú jej rozmery a = 8 m, b = 5 m, c = $\frac{3}{4}$ m, ak priteká do nej každú minútu 50 l vody?
5. Stan tvaru ihlana má podstavu drevený štvorec, ktorého hrana má dĺžku 2 m, výška stranu je 1,8 m. Koľko m^2 plátna treba na jeho zhotovenie, ak 5% povrchu sa počíta na zošitie?
6. Obsah podstavy rotačného kužeľa sa má k plášťu ako 3:5. Jeho telesová výška je 4 cm. Vypočítajte povrch a objem kužeľa.
7. Všetky bočné hrany štvorbokého ihlana majú dĺžku l = 2 dm a zvierajú s rovinou podstavy uhol $\alpha = 60^\circ$. Jeho základňa je obdĺžnik, ktorého uhlopriečky zvierajú uhol $\beta = 60^\circ$. Nájdite objem ihlana.
8. Vypočítajte vzdialenosť vrcholu A pravidelného štvorbokého ihlanu ABCDV od priamky p = VC, ak |AB| = a, |AV| = b.
9. Daný je pravidelný štvorboký ihlan *ABCDV*. Body *M, N* sú po rade stredy hrán *BV* a *CV*. Zostrojte priesečnicu rovín

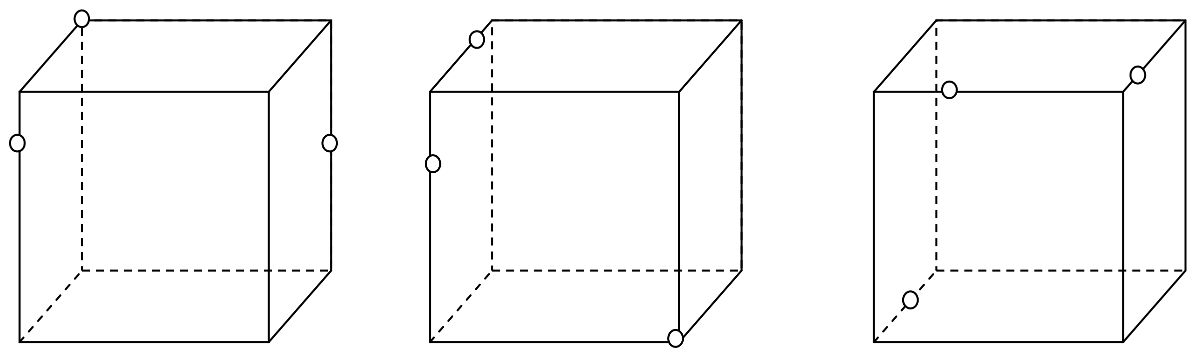
   a) *ACV, BDN* b) *ABN, CDM*
10. Zostrojte rez kocky ABCDEFGH rovinou danou troma bodmi:

    a) K ∈ AE bližšie ku A, L ∈ GF v strede, M ∈ GH bližšie ku H

    b) K ∈ AE v strede, L ∈ BF mimo kocky pod bodom B, M ∈ v zadnej stene pri vrchole D

    c) K ∈ AE, L ∈ DH, M ∈ HG mimo kocky napravo od vrcholu G

11. Zostrojte rez kocky rovinou danou troma bodmi:



5. A Mocninová funkcia, nepriama úmernosť, lineárna lomená funkcia.

1. Určte súradnice stredu hyperboly, ktorá je grafom funkcie $f: y = \dfrac{2x-4}{x-1}$.

2. Určte graf funkcie $f: y = \dfrac{1}{x+2} + 1$.

3. Riešte graficky nerovnicu $x^3 \leq \dfrac{1}{x}$.

4. Načrtnite grafy funkcií $f: y = x^4 - 3$, $g: y = \left|x^4 - 3\right|$ a určte ich vlastnosti.

5. Načrtnite graf funkcie $f: y = \dfrac{3x-8}{x-2}$ a vypočítajte obsah obrazca ohraničeného krivkou $y = f(x)$, osou x v intervale <4; 6>.

6. Riešte graficky rovnicu $x^4 = x^3$ a nerovnicu $x^4 > x^3$.

7. Určte graf funkcie $f: y = \dfrac{3x-1}{x^2 - x}$ a napíšte rovnicu dotyčnice grafu v priesečníku s osou x.

8. Určte graf funkcie $f: y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x}$ zistite, či 1 je funkčná hodnota.

9. Určte obsah obrazca, ktorý je ohraničený grafom funkcií *f:* $y = x^3$, *g:* $y = x$.

10. Dané sú funkcie:

    $f_1(x) = x;$ $\quad f_2(x) = x^2;$ $\quad f_3(x) = x^3;$ $\quad f_3(x) = x^4;$

    $f_5(x) = x^5;$ $\quad f_6(x) = x^6;$ $\quad f_7(x) = x^7;$ $\quad f_8(x) = x^8.$

    a) Rozdeľte ich do skupín podľa rovnakého oboru funkčných hodnôt.

    b) Rozdeľte ich do skupín podľa toho, či sú párne alebo nepárne.

    c) Rozdeľte ich do skupín podľa toho, či sú prosté alebo neprosté.

    d) Určte ich intervaly monotónnosti.

    e) Určte, ktoré z nich sú ohraničené zdola, ktoré zhora.

    f) Určte ich maximum, resp. minimum.

5. B Počítanie s komplexnými číslami. Kvadratická rovnica s komplexnými koreňmi. Binomická rovnica. Moivreova veta.

1. Ak a = – 1+3i, b = – 2+i, určte $\frac{a}{b}$, $\bar{a}b - a\bar{b}$.
2. Pre aké z∈C platí rovnosť:
3. $(2+3i)z + i\bar{z} = 1 - i$
4. Určte modul, t.j. |a|, ak $a = \frac{1-i}{1+i} + 3i - 2$.
5. Dané sú komplexné čísla: $a = 3 + 2i$, $b = 4 + i$, $c = -3 + 4i$

   I. Vyjadrite v algebrickom tvare:

   a) $a + b$, $a + c$, $b - c$ b) $a \,.\, b$, $b \,.\, c$, a^2, b^3

   c) $a : b$, $c : a$ d) $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $a \,.\, \bar{a}$, $b \,.\, \bar{b}$

   II. Vypočítajte: $|a|$, $|b|$, $|c|$

   III. V Gaussovej rovine zobrazte komplexné čísla:

   a, $-b$, $\bar{c}$, $a + b$, $b - c$, $a \,.\, b$
6. Prepíšte do goniometrického tvaru $b = \frac{3+4i}{4-3i}$ a určte $b^{50} + b^{52}$.
7. Určte komplexnú odmocninu $\sqrt{-5+12i}$
8. Ak c = – 1+i, $d = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, určte $\bar{c}$, c.d, c^8, $\frac{c}{d}$.
9. Určte $(i - 1)^8$.
10. Komplexné čísla a = $\frac{i-3}{2+i}$, $b = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ prepíšte do goniometrického tvaru a určte a.b, $\frac{a}{b}$.
11. Komplexné čísla a = 2 (cos $\frac{\pi}{6}$ + i sin $\frac{\pi}{6}$), b = cos 135° + i sin 135° zapíšte v algebraickom tvare.
12. Riešte:

   a) $x^3 = 1$ b) $x^3 = -8$ c) $x^4 = 81$ d) $x^4 = -1$

e) $x^6 = 64$ f) $x^6 = -1$ g) $x^8 = 1$ h) $x^5 = -32$

13. Riešte:

a) $x^2 = -16i$ b) $x^3 = -i$ c) $x^3 = 8i$

d) $x^6 = -64i$ e) $x^4 = -0{,}5 - i.0{,}5\sqrt{3}$ f) $\mathrm{x}^5 = 2 - 2i$

6. A Exponenciálna funkcia. Vlastnosti exponenciálnych funkcií, mocniny s reálnym exponentom.

1. Pre ktoré a∈R je funkcia $f: y = \left(\frac{a}{a+2}\right)^x$ rastúca?

2. Pre ktoré a∈R je zápis $y = \left(\frac{a}{1-2a}\right)^x$ exponenciálna funkcia?

3. Určte definičný obor funkcie $f: y = \frac{\sqrt{16-2^x}}{2^x-4}$

4. Určte graf funkcie

   a) $f: y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ b) $f: y = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1\right|$

5. Pre ktoré a∈R platí vzťah

   a) $a^{\frac{5}{4}} < a^{\frac{4}{5}}$ b) $a^{\frac{4}{3}} < a^{\frac{7}{2}}$

6. Aký je vzťah medzi číslami m, n ak platí nerovnosť

   a) $\left(\frac{4}{5}\right)^m < \left(\frac{4}{5}\right)^n$ b) $\left(\frac{3}{2}\right)^{2m} \le \left(\frac{9}{4}\right)^n$

7. Upravte

   $$\left[\frac{\left(\sqrt[4]{a^3}.b^{-1}\right)^4}{\left(\sqrt{a^{-1}.\sqrt[3]{b^2}}\right)^3}\right]^{-2}$$

8. Porovnajte dané čísla s číslom 1:

   $$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}, \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{4}{5}}, \left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{2}{5}}, \left(\frac{11}{12}\right)^{0}$$

9. Upravte na mocninu so základom 2:

   $$0{,}125.4^{2x-3}.\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$$

10. Určte inverznú funkciu k f: $y = 2^{x-1}$

6.B Aritmetická postupnosť a jej použitie pri riešení úloh.

1. Rozmery kvádra a, b, c tvoria 3 po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti. Súčet dĺžok všetkých hrán je 96 cm. Povrch je 334 cm^2. Určte objem kvádra.
2. V divadle je v prvom rade 24 sedadiel a v poslednom rade je 50 sedadiel, pričom každý nasledujúci rad má o 2 sedadlá viac ako rad predchádzajúci. Koľko sedadiel je v divadle?
3. Určte súčet všetkých navzájom rôznych prirodzených čísel vyhovujúcich nerovnici
$$\frac{18-4x}{3}+x+2\geq\frac{2x-8}{6}$$
4. Určte s_n, a_n v aritmetickej postupnosti, pre ktorú platí: $a_3 + a_7 = 38$, $a_5 + a_{10} = 50$.
5. Rozmery kvádra tvoria tri za sebou idúce členy aritmetickej postupnosti. Určte ich veľkosť, ak ich súčet je 24 cm a objem kvádra je 312 cm^3.
6. Koľko členov aritmetickej postupnosti v ktorej $a_1 = 2$, $d = 3$ musíme najmenej sčítať, aby súčet presiahol 2000?
7. Súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti je $s_n = 4n^2 - 3n$. Určte jej n – tý člen.
8. Osem čísel tvorí aritmetickú postupnosť. Určte ich, ak viete, že súčet prostredných členov je 41 a súčet krajných je 114.
9. Dĺžky strán pravouhlého trojuholníka tvoria tri za sebou idúce členy aritmetickej postupnosti. Aké sú dĺžky týchto strán, ak obsah trojuholníka je 6 dm^2?
10. Štvrtý člen aritmetickej postupnosti je 14, ôsmy je 24. Koľko členov treba sčítať, aby ich súčet bol 90?

7. A Logaritmická funkcia. Vlastnosti logaritmickej funkcie, vety pre počítanie s logaritmami, dekadický a prirodzený logaritmus.

1. Určte graf funkcie $y = \log_2 (x - 3)$, popíšte vlastnosti.
2. Riešte v R nerovnicu $\log_{\frac{1}{2}}(6 - x) - \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) \geq 0$.
3. Určte definičný obor funkcií
   m: $y = \log \sqrt{x-1}$
   n: $y = \sqrt{\log x}$
   $f: y = \sqrt{4 - \log_2 x}$
   $g: y = \dfrac{\sqrt{1 - \log_{0,2} x}}{\log_{0,2}(x+3)}$
4. Určte podmienky a zistite pre ktoré $x \in$ R platí: $\log_x (6 - x) = 2$
5. Pre ktoré hodnoty parametra $a \in$ R je funkcia $f: y = \log_{|a|-1} x$ klesajúca.
6. Daná je funkcia $f: y = \dfrac{2^x}{2^x + 1}$. Určte inverznú funkciu a zistite, či 2 je funkčná hodnota.
7. Pre aké $a \in$ R platí:
   a) $\log_a 7 > \log_a 9$
   b) $\log_a 0{,}3 \leq \log_a 5$
8. Určte definičný obor $f: y = \log_{4-|x|} x$ a zistite pre aké $a \in$ R je funkcia klesajúca.
9. Riešte v R: $\log [3 + 2 \cdot \log (1 + x)] = 0$
10. Riešte v R: $1 + \log x^3 = \dfrac{10}{\log x}$

7. B Kombinačné čísla – Rovnice a nerovnice s kombinačnými číslami, binomická veta.

1. Ak viete, že $\binom{n}{3} = a$, $\binom{n}{4} = b$, určte $\binom{n}{n-3}, \binom{n}{n-4} - \binom{n}{n-3}, \binom{n+1}{4}$.

2. Dokážte, že pre $n \in N$ platí:

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \binom{n+3}{n} = \binom{n+4}{n+1}$$

3. Riešte rovnicu pre $x \in N_0$:

$$\binom{5}{x} + \binom{5}{x+1} = \binom{6}{4}$$

4. Riešte v N_0:

$$\binom{x-1}{x-2} + \binom{x-2}{x-4} = 4$$

5. Riešte v N nerovnicu:

$$\binom{n}{2} + \binom{n+3}{n+1} + \binom{n+6}{2} < 93$$

6. Určte číslo $x \in R$ tak, aby štvrtý člen binomického rozvoja výrazu $\left(4x - \frac{1}{3x}\right)^8$, kde $x \neq 0$, sa rovnal číslu 14.

7. Ktorý člen binomického rozvoja výrazy $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^8 \wedge x \neq 0$, obsahuje x^7 ?

8. Určte člen binomického rozvoja $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{15}$, ktorý neobsahuje x.

9. Určte $\left(1 - \sqrt{3}\right)^4$.

10. Určte siedmy člen rozvoja $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$. Existuje absolútny člen rozvoja ?

8. A Goniometrické funkcie orientovaného uhla. Definícia funkcií sínus, kosínus, vlastnosti, grafy.

1. Nájdite čísla a, b∈R tak, aby graf funkcie $f\colon y = a \sin x + b$ prechádzal bodmi [0; 1], $\left[\frac{\pi}{2}; 3\right]$ a načrtnite graf.

2. Načrtnite grafy funkcií: f: y = 2 . sin $\frac{x}{2}$

   g: y = 3 . cos (x + $\frac{\pi}{2}$)

   m: y = sin 4x - 1

3. Určte definičný obor funkcie $f: y = \sqrt{(\sin x + \cos x)^2 - 1}$.

4. Určte počet koreňov rovnice $2\sin x = \sqrt{3}\ \mathrm{tg}\ x$ v intervale <0; 2π).

5. Overte pravdivosť výroku:

   Ak $\sin x = \frac{2}{3}$ a $\mathrm{tg}\ x = \frac{1}{3}$, potom hodnota 2 cos x je z intervalu <0; 6>.

6. Koľko riešení má rovnica $(\sin x + \cos x)^2 = 0$ v intervale (– π; 2π) ?

7. Určte cos x, sin x, ak $\mathrm{tg}\ x = \frac{5}{12}$ a $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

8. Vypočítajte: sin $\frac{\pi}{6}$, cos $\frac{111}{3}$π, cos (-$\frac{\pi}{2}$)

9. Určte podmienky a zjednodušte: $\frac{1}{1-\sin x}$ - $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ - $\frac{1}{1+\sin x}$

10. Určte podmienky a zjednodušte: $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} + \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$

8. B Dôkazy v matematike. Priamy dôkaz, nepriamy dôkaz, nepriamy dôkaz sporom.

1. Dokáže, že $\forall$ n$\in$N; 3 nedelí $(n^2 - 1) \Rightarrow {}^3 / n$.
2. S využitím podobnosti pravouhlých trojuholníkov dokážte Euklidove vety.
3. Dokážte platnosť vzťahov $a_n = a_1 + (n - 1)d$, kde a_1 je prvý člen aritmetickej postupnosti, d je diferencia; $a_n = a_1.q^{n-1}$, kde a_1 je prvý člen geometrickej postupnosti, q je kvocient, pre výpočet n – tých členov týchto postupností ak n$\in$N.
4. Dokážte, že $\forall$ n$\in$N; $n^3 / (n^3 + 11n)$.
5. Dokážte nepriamo, že body A[3; 5; 1], B[– 7; – 1; 3], C[1; 2; 5] určujú trojuholník ABC.
6. V aritmetickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dokážte, že platia vzťahy:

   $a_n = a_1 + (n - 1)d$; $s_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$
7. Odvoďte vzťah pre súčet konvergentného geometrického radu za predpokladu, že postupnosť súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ geometrických postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná.
8. Dokážte priamo, že $\forall$ n$\in$N; ${}^5 / n \Rightarrow {}^5 / n^2$. Vytvorte k tejto vete obmenu a negáciu.

9. A Postupnosti a rady. Vlastnosti postupnosti, konvergentná postupnosť, podmienka konvergencie geometrického radu.

1. Od ktorého člena počnúc platí pre postupnosť $\left\{\frac{1}{2+3n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, že $|a_n| < 10^{-3}$? Je postupnosť ohraničená?
2. Postupnosť je daná rekurentne $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}.a_n$, pričom hodnota prvého člena postupnosti udáva prirodzené číslo vyhovujúce nerovnici $\frac{3x-2}{4} - \frac{1-2x}{5} < 3 - \frac{x+1}{5}$. Určte prvých 5 členov postupnosti.
3. Je daná postupnosť $\{7n - n^2\}_{n=1}^{\infty}$. Určte množiny hodnôt *n*, pre ktoré je daná postupnosť rastúca resp. klesajúca. Je to monotónna postupnosť ?
4. Zistite, či postupnosť $\left\{\frac{2n+1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená a rastúca.
5. Zistite, pre ktoré čísla *x* možno určiť súčet radu a určte tento súčet ak:
   $(3x-4) + (3x-4)^2 + (3x-4)^3 + (3x-4)^4 + \dots$
6. V ktorej aritmetickej postupnosti $s_5 = s_6 = 60$?
7. Upravte:
   $$\frac{1+2+3+4+\dots+n}{n+\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\frac{n}{8}+\frac{n}{16}+\dots}$$
8. Určte dĺžku špirály, ktorá sa skladá z polkružníc tak, že prvá má polomer *r* a každá nasledujúca má polomer rovný $\frac{2}{3}$ predchádzajúceho polomeru.
9. Medzi čísla $\frac{a-b}{2}$ a $\frac{a+b}{2}$ vložte 3 čísla tak, aby s danými číslami tvorili 5 členov aritmetickej postupnosti. Vypíšte členy tejto postupnosti.
10. Určte limitu postupnosti $\left\{\frac{3n+8}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Je postupnosť rastúca a ohraničená?

9. B Riešenie všeobecného trojuholníka. Výpočty obsahov a obvodov trojuholníka. Euklidova a Pytagorova veta.

1. Z veže vysokej 20 m a vzdialenej od rieky 30 m sa šírka rieky javí pod uhlom 15°30'. Aká široká je rieka?
2. Vypočítajte obsah trojuholníka ABC, ak |AB| = 20 cm, veľkosť uhla BAC je 45° a veľkosť uhla ACB je 60°.
3. Určte obsah trojuholníka ABC ak jedna z jeho strán má dĺžku 10 cm a uhly k nej priľahlé majú veľkosť 30° a 45°.
4. V pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C sú dané veľkosti ťažníc $t_a = 5$, $t_b = 2\sqrt{10}$. Vypočítajte veľkosti strán trojuholníka ABC a polomer kružnice opísanej tomuto trojuholníku.
5. Trojuholník ABC má vrcholy A[1; – 2], B[2; 3], $C \in p$, pričom p: $2x + y - 2 = 0$. Obsah trojuholníka je 8. Určte súradnice bodu C.
6. Vypočítajte veľkosti uhlopriečok v rovnobežníku ABCD, ak |AB| = 35, |BC| = 16, veľkosť uhla ABC = 65°.
7. Vypočítajte veľkosti najväčšieho vnútorného uhla v trojuholníku ABC, ktorého dĺžky strán sú 2C, $\frac{3}{2}$C, 3C, kde $C \in R^+$.
8. Vypočítajte obvod a obsah rovnobežníka, ak sú dané veľkosti jeho uhlopriečok e = 12 cm, f = 16 cm a ich odchýlka je 60°.
9. Medzi vnútornými uhlami v trojuholníku *ABC* platia vzťahy $\alpha = 2\beta, \beta = 3\gamma$. Určte ich.

10. A Geometrická postupnosť a jej použitie pri riešení úloh.

1. Medzi korene rovnice $x^2 - 9x + 8 = 0$ vložte dve čísla tak, aby vznikli štyri za sebou idúce členy geometrickej postupnosti. Určte ich.
2. Určte také číslo, ktoré postupne zväčšené o 7, 23, 71 dáva tri za sebou idúce členy geometrickej postupnosti.
3. V geometrickej postupnosti štyroch členov je súčet krajných dvoch členov 195 a súčet vnútorných dvoch členov 60. Určte túto postupnosť.
4. Akú postupnosť tvoria logaritmy členov geometrickej postupnosti s prvým členom $a_1>0$ a s kvocientom $q>0$?
5. Povrch kvádra je 78 cm^2, súčet rozmerov 13 cm. Určte objem, ak rozmery tvoria 3 za sebou idúce členy geometrickej postupnosti.
6. Riešte v R rovnicu:
   $5^2.5^4.5^6. \dots .5^{2x} = 0{,}04^{-28}$
7. Pre aké $x \in$ R platí rovnosť
   $1+a+a^2+a^3+\dots+a^{x-1} = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$, kde a je reálny parameter.
8. Pôvodná cena stroja bola 40 000 Sk. Akú cenu bude mať stroj po 20 rokoch, ak sa každoročne odpisuje amortizácia 20%.
9. O koľko percent ročne treba počas 10 rokov zvyšovať výrobu, aby sa o 10 rokov pri konštantnom percentuálnom prírastku zvýšila dvojnásobne?
10. Strany trojuholníka a, b, c, tvoria tri po sebe idúce členy geometrickej postupnosti. Určte obsah trojuholníka, ak jeho obvod je 42 cm a strana b = 8 cm.

10. B Vektor a operácie s vektormi. Reálny násobok vektora, skalárny, vektorový a zmiešaný súčin a ich aplikácie.

1. Zistite, či body A[2; 0; 5], B[3; – 1; 4], C[6, 2, – 5] určujú trojuholník ABC. Určte súradnice bodu D tak, aby ABCD bol rovnobežník s daným poradím vrcholov.
2. Dané sú vektory $\vec{a} = (2; 3; -1)$, $\vec{b} = (1; -2; 3)$, $\vec{c} = (2; -1; 1)$. Určte súradnice vektora $\vec{x}$, kde $\vec{x} \perp \vec{a} \wedge \vec{x} \perp \vec{b} \wedge \vec{x} \,.\, \vec{c} = -6$.
3. Nájdite súradnice bodov P, Q, ktoré delia úsečku AB, kde A[10; 2; 3], B[– 5; – 4; 6] na 3 rovnaké časti.
4. Vypočítajte obsah a obvod trojuholníka KLM, kde K[4; 1; – 2], L[5; 3; 1], M[0, 0, 0].
5. Daný je pravidelný štvorboký ihlan ABCDV. Podstavná hrana a = 6 cm a výška tohto kolmého ihlana je $3\sqrt{2}$. Zvoľte vhodne súradnicovú sústavu 0xyz s umiestnením tohto ihlana v nej a riešte úlohy:
   a) vypočítajte |AV|
   b) dokážte, že AV $\perp$ CV
   c) určte veľkosť uhla bočných hrán AV, CV.
6. Nájdite vektor $\vec{u}$, ktorý je kolmý na vektor $\vec{v} = (3; 4)$ a ktorého veľkosť je 15.
7. Vypočítajte veľkosti strán a vnútorných uhlov trojuholníka ABC, ak A[1; 2; – 3], B[– 3; 3; – 2], C[– 1; 1; – 1].
8. Dané sú vektory $\vec{u} = (3; 2; -1)$, $\vec{v} = (1; -4; 3)$. Nájdite všetky vektory, ktoré sú na dva dané vektory kolmé.
9. Dané sú vektory $\vec{a} = (3; -2)$, $\vec{b} = (-1; 5)$. Určte vektor $\vec{c}$, pre ktorý platí $\vec{a} \,.\, \vec{c} = 17$, $\vec{b} \,.\, \vec{c} = 3$.
10. Dané sú body A [-2, 1, 4], B [-1, 0, 1], C [-4, 1, 6], D [-2, -2, -5].
    a) Vypočítajte objem štvorstena ABCD
    b) Určte vektor kolmý na stenu ABC
    c) Vypočítajte obsah steny ABC

11. A Limita postupnosti. Limita funkcie. Vety o limitách, výpočet limít.

1. Určte definičný obor a graf funkcie $f : y = \dfrac{x^2 - x - 6}{|x+2|}$.

2. Určte $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{6+x} - 3}{x-3}$.

3. Existuje limita funkcie $f : y = \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 - x - 2}$ v bode $x = -1$?

4. Vypočítajte limity

   a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^5 + 1}$

   b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2 + 16} - 5}{x - 3}$

   c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} - \dfrac{\sin x}{3x} \right)$

   d) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 4x - 21}$

   e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1}$

   f) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\cos x - \sin 1}$

   g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1}$

5. Určte $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n+2} - \dfrac{2}{n} \right)$.

6. Rozhodnite, ktoré z uvedených postupností sú konvergentné; v kladnom prípade vypočítajte ich limity:

   a) $\left\{ \dfrac{3n+1}{n+2} \right\}_{n=1}^{\infty}$

   b) $\left\{ \dfrac{n^2+1}{n^2-1} \right\}_{n=1}^{\infty}$

   c) $\left\{ \dfrac{3n^2 + 4n + 5}{4n^3 - 2n^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$

   d) $\left\{ \dfrac{5n^2 - 4n + 3}{3n^2 + 2n - 1} \right\}_{n=1}^{\infty}$

   e) $\left\{ 1{,}03^n \right\}_{n=1}^{\infty}$

   f) $\left\{ 0{,}4^n + 3 \right\}_{n=1}^{\infty}$

11. B Iracionálne rovnice a nerovnice a ich riešenie.

1. Riešte v R rovnicu $\sqrt[3]{2+\sqrt{10+2x}} = \sqrt[3]{\sqrt{15-2x}-9}$.
2. Ktoré prirodzené číslo je riešením rovnice $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=1$?
3. Zistite, či koreň rovnice je násobkom deviatich.

   $$\frac{x-1}{1+\sqrt{x}}=4-\frac{1-\sqrt{x}}{2}$$

4. Overte tvrdenie: Korene rovnice $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42$ sú opačné čísla.
5. Riešte v R rovnicu $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$.
6. Riešte v R rovnicu $\sqrt{5^{3x}+19}-\sqrt{5^{3x}-4}=1$
7. Riešte v R nerovnicu $\sqrt{x+1}>x-1$. Koľko prirodzených čísel vyhovuje nerovnici?
8. Koľko celých čísel je riešením nerovnice $\sqrt{2x-x^2}<1+x$?
9. Overte tvrdenie:

   Súčet všetkých celých čísel, ktoré sú riešením nerovnice $\sqrt{8+2x-x^2}>6-3x$ je 9.

10. Riešte rovnicu $2\sqrt{x+3}-\sqrt{2(x+2)}+2=0$
    a) v R
    b) v N

12. A Pojem derivácie funkcie. Derivácia funkcie v bode, vety pre derivovanie funkcie.

1. Napíšte rovnicu dotyčnice ku grafu $f\colon y = 2x - x^2$ v priesečníkoch s osou x.
2. Napíšte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $f : y = \sqrt{12 - x}$ v T[8; y_T].
3. Určte intervaly rastu a klesania funkcie $f : y = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$.
4. Napíšte rovnicu dotyčnice krivky $9x^2+y^2 - 9x - 4y = 0$ v jej bode T[1; y_T].
5. Určte deriváciu funkcie $f\colon y = \ln (x^2 - 1)$ a intervaly, na ktorých sú f aj f' definované.
6. Určte definičný obor funkcie $g : y = \sqrt{\sin x}$ a jej deriváciu na <0; π>. Akú smernicu má dotyčnica ku grafu g v bode $\dfrac{5}{6}\pi$?
7. Určte lokálne extrémy funkcie $f\colon y = x^3 - 12x$.
8. Určte priebeh funkcie $f\colon y = 2x^2 - x^4$ a jej vlastnosti.
9. Aký je smerový uhol a uhol dotyčníc ku grafu funkcie $f\colon y = \sin x$ v bodoch $x = 0$ a $x = \pi$.
10. Nájdite valec, ktorý má pri danom objeme minimálny povrch.

12. B Výpočty objemov a povrchov telies.

1. Tri olovené gule s polomermi $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 4$ cm, $r_3 = 5$ cm zliali do jednej gule. Vypočítajte jej polomer *r*, objem a povrch.
2. Pravidelný štvorboký ihlan má objem 1 dm^3, bočná hrana zviera s výškou uhol $\alpha = 30^\circ$. Vypočítajte povrch ihlana.
3. Vypočítajte objem a povrch pravidelného štvorbokého ihlana s podstavnou hranou dĺžky *a*, ak uhol bočnej steny s rovinou podstavy má veľkosť α.
4. Do pravidelného 6-bokého ihlana je vpísaný aj opísaný kužeľ. Zistite rozdiel v objemoch opísaného a vpísaného kužeľa, keď je daný polomer R = 2 dm opísaného kužeľa a jeho výška je h = 3 dm.
5. Profil násypu vysokého 3m má tvar rovnoramenného lichobežníka, ktorého kratšia základňa je 2,6 m a bočné steny majú od vodorovnej roviny odchýlku 41°. Koľko m^3 zeme obsahuje 1 meter násypu?
6. Rozmery kvádra sú v pomere $1 : \frac{4}{3} : \frac{7}{4}$ a jeho telesová uhlopriečka má dĺžku 29 cm. Vypočítajte objem a povrch kvádra.
7. Určte povrch a objem pravidelného trojbokého ihlana, keď dĺžka podstavnej hrany je 3 cm a bočnej hrany 5 cm.
8. Priemer parabolického automobilového reflektora je 24 cm, hĺbka reflektora je 12 cm. Určte objem reflektora.
9. Rovnostrannému valcu je vpísaná guľa a kužeľ. Podstava kužeľa je zhodná s podstavou valca, vrchol kužeľa je v strede druhej podstavy. Určte pomer objemov týchto telies.
10. Rovnostranný kužeľ je preťatý rovinou rovnobežnou s podstavou tak, že prechádza stredom výšky. Určte povrchy oboch telies.

13. A Definícia neurčitého integrálu. Základné pravidlá a metódy počítania neurčitého integrálu. Určovanie základných primitívnych funkcií.

1. Vypočítajte $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.
2. Určte krivku, ktorá prechádza bodom A[2; 3] a jej dotyčnica v ľubovoľnom bode má smernicu $x + 1$.
3. Určte definičný obor funkcie $f : y = \left(2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ a primitívnu funkciu k tejto funkcii na definičnom obore.
4. Zavedením substitúcie určte $\int \frac{6x^2 x}{x^3 + 1} dx$.
5. Metódou *per partes* určte $\int 3x^2 \ln x \, dx$.
6. Zavedením substitúcie určte $\int \frac{2x+1}{x-2} dx$.
7. Určte krivku, ktorá má v každom bode svojho definičného oboru smernicu dotyčnice $12 - 3x^2$ a prechádza bodom A[3; 2].
8. Metódou *per partes* určte $\int \sin^2 x \, dx$.
9. Vypočítajte: $\int x^2 \sin x \, dx$

   $\int \cos(3x + 2) \, dx$

   $\int tgx \, dx$

13. B Riešenie rovníc a nerovníc, rovnice a nerovnice s absolútnou hodnotou.

1. Zistite, či súčet prirodzených čísel vyhovujúcich nerovnici $\left|\frac{2}{x-4}\right| > 1$ je rovný ôsmim.
2. Riešte v R nerovnicu $|5 - 3x| + 2 < |x+2|$.
3. Koľko celých čísel vyhovuje nerovnici $|x+2| + |x - 2| \leq 6$.
4. Určte graficky počet riešení rovnice $|2 \sin 2x| = 1$ na intervale $(-\pi; 3\pi)$.
5. Určte definičný obor funkcie $f : y = \sqrt{2x+1} + \sqrt{3-x}$.
6. Riešte v R nerovnicu $\frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 10x + 21} < 0$.
7. Určte definičný obor funkcie $f : y = 2\sqrt{(6-x)^2} - \sqrt{x^2 - 8x + 16}$ a zistite pre aké $x \in$ R nadobúda funkcia nezáporné hodnoty.
8. Riešte v R nerovnicu $\frac{|x|^2 - 3|x| - 28}{|x| - 7} > 9$.
9. Určte všetky celé čísla x, pre ktoré platí:

   a) $\frac{2x-11}{4} + \frac{19-2x}{2} < 2x$

   b) $\frac{2x+15}{9} > \frac{1}{5}(x-1) + \frac{x}{3}$
10. Riešte v R nerovnicu $2^{|x|} . 5^{|x|} < 0,1 \; . \; (10^{|x-1|})^3$.

14. A Kombinatorika. Kombinácie, variácie, permutácie.

1. Riešte v N nerovnicu $\binom{x}{2}+\binom{x+3}{2}+\binom{x+6}{2}<72$.
2. Ak sa zväčší počet prvkov o 2, zväčší sa počet permutácií 12 – krát. Počet prvkov určuje číslo $n \in N_0$, ktoré je prvočíslom. Overte tvrdenie.
3. Koľko existuje prirodzených čísel menších ako 2000, ktorých číslice sú navzájom rôzne?
4. Ak sa počet prvkov zväčší o 2, zväčší sa počet variácií tretej triedy bez opakovania o 384. Určte počet prvkov.
5. Zo sady 32 kariet náhodne vyberieme 3 karty. Koľkými spôsobmi možno z nich vytiahnuť aspoň 2 esá?
6. Z koľkých prvkov možno vytvoriť 5040 variácií štvrtej triedy bez opakovania prvkov?
7. Na poličku treba rozostaviť vedľa seba 3 zelené, 2 červené a 2 žlté hrnčeky. Koľko rôznych spôsobov rozostavenia môže vzniknúť?
8. Koľký člen rozvoja výrazu $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^6$ neobsahuje x?
9. Koľko prirodzených čísel menších ako 10 000 možno vytvoriť z cifier 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ?
10. Koľko rôznych trojciferných prirodzených čísel s rôznymi ciframi môžeme utvoriť z číslic 0, 1, 2, 3, 4. Koľko je z nich nepárnych?
11. Určte počet všetkých šesťciferných prirodzených čísel, ktorých ciferný súčet je 4.
12. Na hokejový turnaj vyslalo Slovensko 22 hokejistov – 2 brankárov, 8 obrancov, 12 útočníkov. Koľko je takých šestíc, v ktorých je 1 brankár, 2 obrancovia a 3 útočníci?
13. Koľko slov možno vytvoriť zo slova ZMRZLINA zmenou poradia písmen bez ohľadu na zmysel slova?

14. B Grafy funkcií s absolútnymi hodnotami.

1. Určte graf funkcie $f: y = \dfrac{x^2 - 4}{|x-2|}$ a popíšte jej vlastnosti.
2. Určte graf funkcie f: $y = x\,|x - 4|$ a intervaly rastu a klesania.
3. Určte graficky definičný obor funkcie $f: y = \sqrt{2\cos^2 x - 1}$.
4. Určte graf funkcie f: $y = |x + 1| - |x - 1|$ a zistite, či $f(x) = 2$.
5. Určte graf funkcie f: $y = |\log_2 (x - 2) - 1|$ a rozhodnite o ohraničenosti funkcie.
6. Určte graf funkcie f: $y = \sin x + |\sin x|$.
7. Zostrojte graf funkcie g: $y = |(x - 1)^3 + 2|$.

15. A Komplexné čísla. Definícia algebraického a goniometrického tvaru komplexného čísla, operácie s komplexnými číslami.

1. Komplexné číslo a = $\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ prepíšte do algebraického a goniometrického tvaru.
2. Vyjadrite súčin a podiel komplexných čísel a = $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$, b = $\frac{1}{3}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Vypočítajte vzdialenosť obrazov komplexných čísel a, $\overline{a}$ v rovine komplexných čísel.
3. Vypočítajte $\frac{(1+2i)^3+(1-2i)^3}{(1+2i)^2-(1-2i)^2}$.
4. Riešte v C rovnicu |z| + z = 2 – i.
5. Vypočítajte $\left(\frac{4}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}$.
6. Riešte v C rovnicu $z^3+2z^2+2z+1 = 0$.
7. Určte $\sqrt[3]{-\sqrt{3}+i}$ v obore komplexných čísel.
8. Ak a = 2 – 3i, b = 4+2i, určte $a^2\overline{b}+\overline{a}b^2$. Prepíšte číslo $\overline{a}$ do goniometrického tvaru.
9. Riešte v C rovnicu $8x^3 - 27 = 0$ rozkladom na súčin.
10. Určte $(2 - 3i)^4$.

15. B Riešenie sústavy rovníc a nerovníc. Grafické riešenie sústav rovníc a nerovníc.

1. Riešte v R^2 sústavu:

$$\frac{12}{\sqrt{x-1}}+\frac{5}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}}=5\wedge\frac{8}{\sqrt{x-1}}+\frac{10}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}}=6$$

2. Riešte v R sústavu rovníc:

   $x+y+z = 4$

   $x+2y+3z = 5$

   $x^2+y^2+z^2 = 14$

3. Určte rovnicu, ktorou je určená kvadratická funkcia f s definičným obor R, ktorej graf prechádza bodom A[1; 2], B[– 2; 5], C[3; 20].

4. Určte graficky množinu všetkých bodov pre súradnice ktorých platí:

   $x+2y = 8 \wedge 2x - y\leq 8$

5. Riešte graficky nerovnice

   a) $2^x<3 - x$

   b) $x^{-2}\geq x^2$

6. Určte pre ktoré $x, y\in R$ platí sústava nerovníc:

   $y\geq 0 \wedge y\geq - x^3 \wedge y< - x+5 \wedge x - 2y+4\geq 0$

7. Určte vzájomnú polohu priamky p a roviny ρ ak:

   p: $x = - 1+2t$, $y = 3+4t$, $z = 3t$; $t\in R$

   ρ: $3x - 6y+2z - 5 = 0$

8. Určte všetky $[x; y]\in R^2$ pre ktoré platí:

   $x+y^2 = 7 \wedge xy^2 = 12$

9. Riešte v R^2:

   $2^x.3^y = 12 \wedge 2^y.3^x = 18$

10. Údržbár sa zaviazal, že urobí opravárske práce v závode za 24 dní. Dostal na výpomoc robotníka, s ktorým urobili všetky opravy za 12 a 1/3 dňa. Ako dlho by trvala práca len robotníkovi?

16. A Vektor a operácie s vektormi. Skladanie vektorov, lineárna kombinácia vektorov.

1. Dané sú body A[1; 1], B[2; – 1], C[3; 2].
   a) Dokážte, že body A, B, C sú vrcholy trojuholníka.
   b) Vypočítajte veľkosti strán trojuholníka
   c) Určte veľkosti vnútorných uhlov v ΔABC.
2. Dané sú vektory $\vec{m} = (2; -1; 5)$, $\vec{n} = (3; 0; 2)$, $\vec{u} = (4; 1; -1)$, $\vec{v} = (1; 5; 8)$. Rozhodnite, ktorý z vektorov $\vec{u}$, $\vec{v}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{m}$, $\vec{n}$.
3. Určte súradnice bodov P, R, ktoré delia úsečku AB, ak A[– 1; 3; 5], B[8; – 12; – 7] na 3 rovnaké časti. Aká je dĺžka úsečky AB?
4. Určte vzdialenosť bodu A[1; 1; 5] od priamky p ak:
   p: $x = 5 - y$, $y = 1+t$; $z = 3+t$; $t \in R$.
5. Nech $\vec{u} \perp \vec{v}$, pričom $\vec{u} = (u_1; u_2)$, $\vec{v} = (v_1; v_2)$ a $|\vec{u}| = |\vec{v}|$. Rozhodnite, či $\vec{a} \perp \vec{b}$ keď $\vec{a} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$, $\vec{b} = -3\vec{u} + 2\vec{v}$.
6. Nech $\vec{a} = (2; -1; 2)$; $\vec{b} = (1; 3; 4)$, $\vec{c} = (5; 1; -3)$. Určte $\vec{w} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} . \vec{c}$, $\vec{a} \times \vec{b}$.
7. Dané sú body A[3; – 20; 0], B[3; – 4; 0], C[3; 1; $5\sqrt{3}$].
   a) Určte bod D tak, aby štvoruholník ABCD s daným poradím vrcholov bol rovnobežník.
   b) Vypočítajte veľkosť uhla DAB.
8. V stredovej súmernosti je obrazom bodu $A[-1/2, 3/5, -17/10]$ bod $A'[1{,}3; -1{,}6; -1{,}8]$. Určte súradnice stredu súmernosti.
9. Pre ktoré hodnoty parametrov a, $b \in R$ ležia body $A[5; -2; a]$, $B[1; b; 0]$, $C[-3; 0; 1]$ na jednej priamke?
10. Dané sú body $K[3, 2, -4]$, $L[3, 6, -5]$, $M[-4, -1, 0]$. Vypočítajte súradnice bodu N, ak platí: $L - K = \vec{u}$, $\overrightarrow{NM} = -2.\vec{u}$.

16. B Zložená funkcia. Určovanie definičných oborov funkcií, grafy, derivácia zloženej funkcie.

1. Určte definičný obor funkcie $f: y = \log \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x + 1}$ a zistite pre $x \in$ D(f) je f(x) >0.
2. Určte definičný obor funkcie $f: y = x^{\log x} + 10x^{-\log x} - 11$ a zistite pre aké $x \in$ D(f) platí že f(x) = 0.
3. Určte definičný obor funkcie $f: y = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}$.
4. Určte definičný obor funkcie $f: y = \sqrt{3 - 4\cos^2 x}$.
5. Určte definičný obor funkcie $f: y = \sqrt{6 + x - x^2}$, jej graf a vlastnosti.
6. Daná je funkcia $f: y = \log_2 (x - 3)$. Určte definičný obor funkcie, graf funkcie f^2 a graf inverznej funkcie k tejto funkcii.
7. Daná je funkcia $f: y = \sqrt{4x - x^2}$. Určte jej definičný obor a napíšte rovnicu dotyčnice jej krivky v bode T[2; y_0].
8. Daná je funkcia $f: y = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$. Určte jej definičný obor a graf. Napíšte dotyčnice ku grafu funkcie v bode T[6; y_0].
9. Daná je funkcia f: y = log (tg x). Určte jej definičný obor a smernicu dotyčnice v bode $x = \dfrac{\pi}{4}$.
10. Zistite, či funkcia f: $y = \sin^2 x - x^3$ je nepárna a určte $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

17. A Analytické vyjadrenie priamky v rovine a priestore. Časti priamky, vzájomná poloha a uhol dvoch priamok.

1. Dané sú body A[3; – 4], B[2; 1]. Napíšte
   a) parametrické vyjadrenie priamky
   b) všeobecnú rovnicu priamky AB
   c) smernicový tvar rovnice priamky AB
2. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom M[$\sqrt{3}; -\sqrt{3}$] a je rovnobežná s priamkou p: $x+y+9 = 0$. Aké je vzdialenosť priamok p, q?
3. Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom P[3; $-\sqrt{3}$] a zviera s osou x uhol 120°.
4. Napíšte všeobecnú rovnicu priamky prechádzajúcej bodmi A[3; 1], B[– 1; 4] a vypočítajte dĺžku úsečky AB.
5. Dané sú body A[3; 5; – 1], B[2; 1; 3] - napíšte rovnicu priamky AB, polpriamky AB, úsečky AB.
6. Určte vzájomnú polohu priamok $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ ak A[3; 2; 1], B[4; 1; 0], C[– 4; 5; 4], D[– 1; – 2; – 1]. Aká je vzdialenosť stredov úsečiek AB, CD?
7. Určte vzájomnú polohu priamok p, q ak:
   p: $6x - 5y + 25 = 0$; q: $x = -5 + 5t$, $y = -1+6t$; $t \in R$.
   Aké úseky vytína priamka q na súradnicových osiach x, y?
8. Rozhodnite o vzájomnej polohe priamok p, q ktorých parametrické vyjadrenie je:
   p: $x = 3 - t$; $y = -2+2t$; $z = 3t$; $t \in R$
   q: $x = 2+s$; $y = 1 - s$; $z = 9+3s$; $s \in R$
9. Vypočítajte obvod trojuholníka, ak rovnice jeho strán sú $7x - 4y - 1 = 0$; $x - 2y+7 = 0$; $2x+y+4 = 0$.
10. Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, ktorej smernica $k = \frac{1}{3}$ a prechádza priesečníkom priamok p: $x - 2y+8 = 0$; q: $3x+5y+2 = 0$. Aké je uhol priamok p, q?

17. B Určovanie lokálnych extrémov funkcií, intervalov monotónnosti, vyšetrovanie priebehu funkcií.

1. Napíšte podmienky pre parameter a, b, c, d lineárnej lomenej funkcie $f: y = \frac{ax+b}{cx+d}$ a derivovaním tejto funkcie ukážte, že nemá lokálne extrémy.
2. Určte intervaly monotónnosti a lokálne extrémy funkcie f: $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$
3. Vyšetrite priebeh funkcie $f: y = \frac{x^2}{1+x^2}$ a nakreslite jej graf.
4. Nájdite lokálne extrémy funkcie f: $y = x + \cos 2x$ v intervale $(0; \pi)$
5. Nájdite valec, ktorý má pre daná povrch maximálny objem. Porovnajte výšku a polomer tohto valca.
6. Veľkosť dráhy, ktorú koná teleso, sa mení v závislosti od času podľa rovnice $s = 2t^3 - t^2 + 1$. V ktorom čase má teleso nulovú rýchlosť a kedy má nulové zrýchlenie?
7. Na priamke p: $y = 3x+6$ určte bod, pre ktorý je súčet druhých mocnín vzdialeností od bodov A[2; 5], B[3; 5] minimálna.
8. Má funkcia $f: y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ lokálny extrém?
9. Vyšetrite priebeh funkcie $f: y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ a určte graf.

18. A Analytické vyjadrenie roviny. Parametrická a všeobecná rovnica roviny, vzájomná poloha rovín, uhol rovín.

1. Dané sú body A[1; 0; 2], B[0; 2; 3], C[4; 0; 0]. Napíšte analytické vyjadrenie roviny ABC
   a) parametrické
   b) všeobecné
2. Určte vzájomnú polohu rovín α: $x - y + z + 1 = 0$, β: $x + y + 3z - 3 = 0$
   Majú rovinu α, β spoločnú priesečnicu? Ak áno, napíšte jej analytické vyjadrenie.
3. Akú vzájomnú polohu majú roviny ρ, σ ak:
   ρ: $x - 2y - 2z - 6 = 0$
   σ: $x = 1 + 2r + 2s$; $y = 3 - 2s$; $z = -2r + r + 3s$; $[r, s] \in R^2$
4. Určte uhol roviny ρ prechádzajúcej bodom R[2; 2; 2] kolmo na priamku AB, A[– 2; 1; – 1], B[– 3; – 1; 1] a roviny τ určenej parametricky:
   τ: $x = 3 + r - 2z$; $y = 2 - r + 2s$; $z = -1 - 4r$; $[r; s] \in R^2$
5. Dané sú roviny α: $x - 2y - z + 3 = 0$; β: $x + y + 2z - 5 = 0$. Vypočítajte uhol týchto rovín a smerový vektor ich priesečnice.
6. Napíšte všeobecnú rovnicu roviny určenej bodom M[3; 2; – 1] a priamkou p: $x = 2 - t$; $y = 3 + 2t$; $z = -t$; $t \in R$.
7. Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodmi M[3; – 2; – 4]; N[7; 2; 1] a je rovnobežná s osou *x*.
8. Rozhodnite, či priamky p: $x = 8 - 4t$; $y = 4 + 8t$; $z = -12t$; $t \in R$; q: $x = 3 + 3s$; $y = 1 - 6s$; $z = -2 + 9s$; $s \in R$ určujú rovinu a napíšte jej parametrické vyjadrenie.
9. Určujú priamky p: $x = 3 - t$; $y = -2 + 2y$; $z = 3t$; $t \in R$; q: $x = 2 + s$; $y = 1 - s$; $z = 9 + 3s$; $s \in R$ rovinu? Napíšte jej všeobecnú rovnicu.
10. Napíšte parametrické vyjadrenie roviny danej bodmi A[– 1; – 1; 0], B[1; 1; 2], C[2; 2; 3].

18. B Vzťahy medzi goniometrickými funkciami.

1. Zjednodušte $\dfrac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{\sin(x+y)-\sin(x-y)}$

2. S využitím goniometrických vzorcov vyjadrite cos 3x v závislosti na cos x

3. Určte hodnoty sin x, tg x, cotg x ak cos x = $-\dfrac{4}{5} \wedge x \in \left(\pi, \dfrac{3}{2}\pi\right)$

4. Zjednodušte výraz a určte pre ktoré $x \in$ R je definovaný:

   $\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}+\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$

5. Dokážte, že pre prípustné hodnoty premennej $x \in$ R platí rovnosť:

   $\dfrac{\sin x+\sin 2x}{1+\cos x+\cos 2x}:\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\sin 3x+\sin x}=-1$

6. Zjednodušte funkčný predpis funkcie $f: y=\dfrac{\cos^2 x}{\cos\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$ a určte jej definičný obor.

7. S využitím goniometrických vzorcov vyjadrite sin 75°, cos 15°, (cos 15°+cos 45°)

8. Dokážte identitu $1+\dfrac{2}{\operatorname{tg}x+\operatorname{cotg}x}=(\sin x+\cos x)^2$ a určte podmienky, pre ktoré platia úpravy.

9. Zjednodušte $\dfrac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}$

10. Určte sin (x+y), cos (x+y) ak cos x = $\dfrac{3}{5} \wedge x \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ a sin y = $\dfrac{5}{13} \wedge y \in \left(\dfrac{3}{2}\pi;2\pi\right)$

19. A Vzájomné polohy priamok a rovín. Vzdialenosť dvoch bodov, bodu od priamky a roviny, vzdialenosti rovnobežných priamok a rovín, uhly priamok a rovín.

1. Zistite vzájomnú polohu priamky p = $\overleftrightarrow{AB}$, ak A[1; 3; 4], B[– 1; 2; 5] a roviny ρ: 2x+3y+z – 3 = 0
2. Určte veľkosť uhla priamky $\overleftrightarrow{PQ}$, kde P[1; 0; 2], Q[– 2; – 2; 1] a roviny ρ = $\overleftrightarrow{ABC}$, ak A[1; – 2; 1], B[0; 2; 3], C[– 2; 3; 0].
3. Bodom Q[6; – 9; 12] veďte rovinu rovnobežnú s rovinou ρ: x – 7y+3z – 19 = 0. Určte vzdialenosť týchto rovín.
4. Určte vzdialenosť bodu M[3; – 1; 4] od priamky AB, ak A[0; 2; 1], B[1; 3; 0].
5. Na priamke x+2y – 5 = 0 nájdite bod, ktorý má od priamky 3x – 4y – 5 = 0 vzdialenosť v = 2.
6. Vypočítajte vzdialenosť bodu A od roviny ρ = $\overleftrightarrow{KLM}$, ak K[3; 1; 4], L[3; 0; 2], M[5; 1; 0], A[– 3; 3; – 4].
7. Vypočítajte dĺžku výšky v_c v trojuholníku ABC, ak A[1; 3], B[– 3; 0], C[4; – 2]. Akú dĺžku má ťažnica t_a?
8. Daná je priamka p: x = 1+t, y = 2 – t, z = t; t∈R a rovina ρ: x = 5 – r – 3s, y = 16+r – 3s, z = 3+4r; [r, s]∈R^2. Určte uhol priamky p a roviny ρ.
9. Nájdite všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodmi A[1; – 1; 3], B[– 2; – 13; 2] a je kolmá na rovinu ρ: 2x – 3y+2z – 6 = 0.
10. Určte vzájomnú polohu roviny x + 2y – z + 4 = 0 a priamky, ktorá je priesečnicou rovín 2x – y – 3z + 3 = 0, 3x + y – 4z + 7 = 0

19. B Riešenie lineárnych rovníc a nerovníc s parametrom.

1. Riešte v R rovnicu s reálnym parametrom b:

$$\frac{2xx}{x+b}-\frac{x}{b-x}=\frac{b^2}{4\left(x^2-b^2\right)}$$

2. Riešte v R rovnicu s reálnym parametrom n:

$$\frac{x^2+1}{n^2x-2n}-\frac{1}{2-nx}=\frac{x}{n}$$

3. V rovnicu 2x – *y*+c = 0 určte všetky $c \in R$ tak, aby uvažovaná priamka a kružnica $x^2+y^2 = 4$ mali práve 1 spoločný bod.
4. Určte všetky hodnoty parametra $a \in R$, pre ktoré má rovnica $\frac{x}{x-a}=a+1$ aspoň jeden záporný koreň.
5. Určte pre ktoré hodnoty parametra $q \in R$ je priamka *y* = *x*+q sečnicou elipsy $x^2+2y^2 = 6$.
6. Riešte v R rovnicu s reálnym parametrom m a neznámou *x*: $m^2x = m(x+2) - 2$
7. Riešte v R rovnicu $\frac{a(x+2)-3(x-1)}{x+1}=1$, ak *a* je reálny parameter.
8. Pre koľko prirodzených čísel *a* má rovnica a(3x – 1) = 5(*x*+4) riešenie z intervalu <3; ∞)?
9. Riešte rovnicu s parametrom b: $\frac{b}{x}-1=\frac{4}{bx}-\frac{2}{b}$
10. Vypočítajte všetky hodnoty reálneho parametra *m*, pre ktoré je exponenciálna funkcia $f(x) = \left(\frac{2m-1}{m-2}\right)^x$ rastúca.

20. A Kružnica, kruh, guľová plocha. Analytické vyjadrenie, vzájomná poloha priamky a kružnice. Stredový a obvodový uhol.

1. Úsečka AB, A[3; 1], B[0; 4] je priemerom kružnice. Určte rovnicu kružnice a priesečníky kružnice so súradnicovými osami.
2. Určte stred a polomer kružnice $x^2+y^2 - 6x - 10y+29 = 0$.
3. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza stredmi kružníc $x^2+y^2 - 4 - 12 = 0$; $x^2+y^2 - 6y = 0$.
4. Napíšte rovnicu kružnice, ak je daný jej stred S[1; 2] a rovnica priamky $8x+15y+13 = 0$, ktorej sa kružnica dotýka.
5. Akú dlhú tetivu vytína priamka $2x - y - 6 = 0$ na kružnici $x^2+y^2 - 4x - 5y - 1 = 0$?
6. Napíšte rovnicu dotyčnice t ku kružnici $x^2+y^2 = 25$ rovnobežnú s priamkou p: $3x+4y - 1 = 0$.
7. Určte stred a polomer kružnice $x^2+y^2 - 6x+10y+14 = 0$ a napíšte rovnicu dotyčnice danej kružnice v jej bode $T[x_0; - 3]$.
8. Určte stred a polomer guľovej plochy $x^2+y^2+z^2 - 12x+40y - 3z - 4 = 0$.
9. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza bodmi M[5; 3], N[6; 2] a jej stred leží na priamke p: $3x - 4y - 3 = 0$.
10. Pre akú hodnotu parametra d má guľová plocha $(x - 2)^2+y^2+z^2+d = 0$ s priamkou p: $x = 1+t$; $y = t - 1$; $z = t$; $t\in R$ práve jeden spoločný bod?
11. Napíšte rovnicu guľovej plochy, ktorá má stred S[4; 3; – 1] a dotýka sa roviny $2x+6y+3z+5 = 0$. Zistite, či bod A[0; 2; 1] je bodom guľovej plochy. Má guľová plocha priesečníky s osou x?
12. Dokážte, že spojnica bodov vyznačujúcich na ciferníku hodín 2 a 5 je kolmá na spojnicu bodov 3 a 10.

20. B Riešenie rovníc vyšších stupňov v R a C. Riešenie týchto rovníc pomocou substitúcie. Binomické rovnice.

1. V obore komplexných čísel riešte rovnicu $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x+6 = 0$.
2. Určte obsah obrazca, ktorý tvoria obrazy koreňov rovnice $z^4 = -16$ v Gaussovej rovine komplexných čísel.
3. Riešte v C rovnicu $x^6 - 64 = 0$
   a) rozkladom
   b) ako binomickú
4. Riešte v R rovnicu $(x^2+5x+2)^2 = 4$.
5. Riešte v R rovnicu $\sin^4 x+2\cos^2 x = 1$
6. Obrazy z_1, z_2 koreňov binomickej rovnice $z^6 - 1 = 0$ určujú v Gaussovej rovine komplexných čísel priamku p. Vypočítajte vzdialenosť obrazu koreňa z_4 od priamky p.
7. Riešte v R rovnicu $x^3 - 2x^2 - 25x+50 = 0$ a napíšte ju ako súčin koreňových činiteľov.
8. Určte definičný obor funkcie $f : y = \dfrac{1}{x^3 - 37x + 84}$.
9. Rozložte na koreňové činitele rovnicu $x^5+6x^4+12x^3+10x^2+3x = 0$.
10. Riešte rovnicu:

    a) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ b) $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$
11. Riešte:

    a) $x^3 = 1$ b) $x^3 = -8$ c) $x^4 = 81$
12. Riešte:
    a) $x^6 = -64i$ b) $x^4 = -0,5 - i.0,5\sqrt{3}$ c) $x^5 = 2 - 2i$

21. A Parabola. Analytické vyjadrenie, vzájomná poloha priamky a paraboly.

1. Napíšte analytické vyjadrenie paraboly, ktorá má dané ohnisko F[– 3; 8] a riadiacu priamku d: $y+4 = 0$.
2. Určte súradnice ohniska, vrcholu a rovnicu riadiacej priamky paraboly $y^2+8y+3x - 6 = 0$.
3. Načrtnite a určte súradnice ohniska, vrcholu a rovnicu riadiacej priamky paraboly $y^2 + 9x + 6y - 9 = 0$.
4. Určte rovnicu paraboly, ktorá má vrchol V[6; – 2], prechádza bodom B[3; 5] a má os rovnobežnú s osou *y*.
5. Akú dlhú tetivu vytína parabola $y^2 - 8x = 0$ na priamke $x - y - 2 = 0$? Určte parameter paraboly.
6. Daná je parabola $y^2 = 4x$ a bod M[0; 5]. Určte rovnicu všetkých priamok, ktoré majú s parabolou práve jeden spoločný bod a prechádzajú bodom M.
7. Určte súradnice ohniska paraboly $x^2+4x - 4y+8 = 0$ a zistite polohu bodov A[1; 2], B[– 1; 5], C[– 2; 1] vzhľadom na danú parabolu a jej vnútornú a vonkajšiu oblasť.
8. Daná je parabola $x^2+2x - y - 3 = 0$. Určte rovnice všetkých dotyčníc paraboly rovnobežných s priamkou $2x - y+7 = 0$.
9. Určte vzájomnú polohu krivky *k* a daných priamok. V prípade neprázdneho prieniku určte súradnice spoločných bodov. $k : y^2 = 4x$; $p : x - 2y + 3 = 0$, $q: y - 2 = 0$
10. Daná je krivka *k* a priamka *p*. Určte hodnotu parametra $c \in R$ tak, aby priamka *p* bola dotyčnicou krivky *k*. Určte aj súradnice dotykového bodu: $k : y^2 + 3x + 4y - 8 = 0$, $p: x + 4y + c = 0$

21. B Úpravy algebraických výrazov.

1. Upravte a určte podmienky:

$$\frac{\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}+\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}}{\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}-\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}}.$$

2. Zostrojte kvadratickú rovnicu, ktorej korene sú:

$$x_1 = \frac{1}{10-\sqrt{72}} \wedge x_2 = \frac{1}{10+6\sqrt{2}}$$

3. Upravte výrazy a určte podmienky:

a) $\left(x^3+y^3\right)^{\frac{1}{2}}.(x+y)^{\frac{1}{2}}.\sqrt{\left(x^2+y^2-xy\right)^{-1}}$

b) $\frac{n^2-n}{2}+\binom{n}{n-3}+\binom{n+1}{4}$

4. Zjednodušte výrazy

a) $\left[1-2\left(\sqrt{3}\right)^{-1}\right]^{-2}$

b) $\frac{12}{4a^2-9}+\frac{2}{3-2a}$

5. Upravte:

a) $\frac{\left(x^2-5x+6\right)^2}{x^3-3x^2-4x+12}:\frac{2x^2-18}{x^3+8}$

b) $\frac{\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x^2}}}$

6. Upravte:

a) $\frac{3\sqrt{7}+7\sqrt{3}}{3\sqrt{7}-7\sqrt{3}}$

b) $\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}$

7. Riešte v R nerovnicu $\frac{y^4-1}{y^3+y^2+y+1}\leq 4$.

8. Upravte výraz: $\left(\frac{x+8}{2x-16}-\frac{x-8}{2x+16}-\frac{128}{64-x^2}\right).\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{x}\right)$

9. Zjednodušte výraz a určte definičný obor výrazu:

$$\frac{1}{x+2}\left[\left(\frac{x-2}{x}+\frac{x}{2-x}\right):\left(\frac{x^2-1}{x^2-4}\right)\right]$$

10. Upravte a určte podmienky:

$$\frac{(n+3)!}{(n+1)!(n^2-4)}$$

22. A Elipsa. Analytické vyjadrenie, vzájomná poloha priamky a elipsy.

1. Načrtnite graf funkcie $f : y = \sqrt{9-4x^2}$ a určte jej vlastnosti.

2. Elipsa, ktorej osi sú rovnobežné so súradnicovými osami má stred S[1; 2]. Napíšte jej analytické vyjadrenie, ak hlavná poloos má dĺžku 13 a vzdialenosť ohnísk je 10.

3. Napíšte analytické vyjadrenie elipsy, ktorá má ohniská F_1 = [– 3; 1], F_2[5; 1] a hlavnú poloos o dĺžke 5.

4. Určte súradnice stredu, ohnísk, hlavných a vedľajších vrcholov elipsy $9x^2+25y^2 - 54x - 100y - 44 = 0$.

5. Overte, že rovnica $x^2+4y^2+4x - 8y - 32 = 0$ je analytickým vyjadrením elipsy a zistite, pre ktoré reálne číslo *a* je priamka $3x+2y+a = 0$ dotyčnicou elipsy.

6. Napíšte rovnicu elipsy, ktorá má vrcholy [– 3; 0], [3; 0] a vzdialenosť ohnísk je 8. Osi elipsy sú rovnobežné so súradnicovými osami.

7. Zistite, či existuje elipsa, ktorá má osi rovnobežné so súradnicovými osami, stred S[3; 1] a prechádza bodmi A[– 2; 0], B[0; 2].

8. Napíšte rovnicu dotyčnice elipsy $x^2+4y^2 = 20$ v jej dotykovom bode T[2; y_0] a určte jej odchýlku s osou *x*.

9. Daná je elipsa $3x^2+6y^2 = 18$ a bod M[4; – 1].

   a) Dokážte, že M je bodom vonkajšej oblasti elipsy.

   b) Napíšte rovnicu dotyčnice elipsy prechádzajúcej bodom M.

10. Charakterizujte kužeľosečku $x^2 + 4y^2 = 20$. Vypočítajte veľkosť strany štvorca opísaného do danej kužeľosečky.

22. B Funkcia a funkcia k nej inverzná. Predpis funkcií, grafy, definičné obory a obory hodnôt.

1. Inverzná funkcia k funkcii f: $y = 10^{x-2} - 1$ je funkcia f^{-1}:

   A: $y = 2 - \log x$ B: $y = x - 2 \log (x - 1)$ C: $y = 2+\log(x+2)$

   D: $y = 2 - \log (x+1)$ E: žiadna z odpovedí A – D nie je správna.

2. Dané sú funkcie f:$y = 2x^4$; g: $y = 3x^5$. Určte ich definičné obory, obory hodnôt a rozhodnite, ku ktorej z nich existuje inverzná funkcia. Určte jej funkčný predpis.

3. Určte graf funkcie f: $y = 2 - 2^x$ a rozhodnite, či existuje k nej inverzná funkcia. Určte funkčný predpis f^{-1} a jej vlastnosti.

4. Inverzná funkcia k funkcii f: $y = 3x^3$ je f^{-1}:

   A: $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x}$ B: $y = \sqrt[3]{\frac{3}{x}}$ C: $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{9x}$ D: $y = \sqrt[3]{3x}$ E: $y = x\sqrt[3]{3}$.

5. Dané sú funkcie $y = \operatorname{tg} x$; $y = \cos x$. Určte ich definičné obory tak, aby k nim boli definované inverzné funkcie. Určte ich funkčné predpisy.

6. Načrtnite graf funkcie g: $y = 2 - x^2$; $x \in \langle 0; \infty)$. Určte graf g^{-1}, $D(g^{-1})$, $H(g^{-1})$.

7. Načrtnite graf funkcie $f : y = \frac{x-1}{x-3}$. Určte funkčný predpis f^{-1}, $D(f^{-1})$, $H(f^{-1})$.

8. Daná je funkcie f: $y = 1+\log (x+2)$. Určte k nej inverznú funkciu.

9. Načrtnite graf funkcie h: $y = x^2+4x+3 \wedge x \in \langle 2; \infty)$. Určte funkčný predpis h^{-1}, $D(h^{-1})$, $H(h^{-1})$.

10. K funkcii $f : y = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$ určte inverznú funkciu.

23. A Hyperbola. Analytické vyjadrenie, vzájomná poloha priamky a hyperboly.

1. Hyperbola má hlavnú os na osi *x*, vedľajšiu os na osi *y* a prechádza bodmi M[4; $2\sqrt{3}$], N[3; $\sqrt{10}$]. Napíšte jej rovnicu.

2. Vrcholmi hyperboly sú body A[2; – 3], B[8; – 3] a jej excentricita má dĺžku 5. Určte analytické vyjadrenie tejto hyperboly.

3. Daná je hyperbola $4x^2 - 9y^2 = 36$. Ktorá z nasledujúcich priamok má s danou hyperbolou práve 1 spoločný bod?

   A: p:3x – 2y = 0   B: q:2x – 3y+3 = 0   C: z: $y = \frac{\sqrt{5}}{3} - x - 1$.

4. Hyperbola má stred v počiatku súradnicového systému, osi rovnobežné s osami *x*, *y* a jedno z jej ohnísk má súradnice [$\sqrt{5}$; 0]. Bod A[$2\sqrt{2}$; 1] je bodom hyperboly. Napíšte jej rovnicu.
5. Určte množinu bodov, ktorej analytické vyjadrenie je $9x^2 - 16y^2 - 36x - 96y - 252 = 0$.
6. Napíšte rovnice všetkých dotyčníc hyperboly $4x^2 - y^2 = 36$, ktoré sú rovnobežné s priamkou 5x – 2y+7 = 0. Aká je vzdialenosť ohnísk a vrcholov hyperboly?
7. Na hyperbole $9x^2 - 4y^2 = 324$ nájdite bod najbližší k priamke 15x – 4y – 60 = 0.
8. Napíšte rovnicu hyperboly, ktorej vrcholy sú ohniskami a ohniská vrcholmi elipsy $16x^2 + 25y^2 = 400$.
9. Napíšte rovnicu hyperboly, ktorej hlavná os je rovnobežná so súradnicovou osou *y*, ak $S[-1, 2]$, $a = 1$, $b = 3$
10. Napíšte rovnicu hyperboly, ak poznáte vrcholy $A[-3, -2]$, $B[7, -2]$ a dĺžku vedľajšej poloosi $b = 3$.

23. B Goniometrické rovnice.

1. Riešte v R rovnicu

   $$1-\sin 5x=\left(\cos\frac{3}{2}x-\sin\frac{3}{2}x\right)^2$$

2. Riešte rovnicu pre $x\in\langle 0;\,2\pi\rangle$

   $$\sin x+\cos x=\frac{1}{\sin x}$$

3. Riešte v R rovnicu:

   $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$

4. Riešte v R rovnicu $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 0.$

5. Určte definičný obor funkcie $f: y=\sqrt{\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x-2}$

6. Riešte v R rovnicu $4\cos^3 x - 4\cos^2 x + \cos(\pi+x) + 1 = 0$

7. Riešte v R:

   $$\frac{1}{2}\sin 2x \,.\, \cos x = \sin x$$

   Zistite, koľko riešení má rovnica na intervale $\langle -\pi;\,2\pi\rangle$.

8. Riešte v R rovnicu $\sin^3 x - \cos^3 x = 0.$

9. Určte počet riešení rovnice $\sin^4 x = 1 - \cos^4 x$ pre $x\in\langle 0;\,3\pi\rangle$.

10. Riešte v R:

    $\sin x + \cos x = 1$

24. A Zhodné zobrazenia v rovine. Druhy zhodných zobrazení. Osová a stredová súmernosť. Skladanie osových súmerností.

1. Daný je lichobežník ABCD. V určenom zobrazení načrtnite obrazy útvarov:

   V súmernosti S podľa stredu O zobrazte $\Delta ACD \xrightarrow{S} \Delta A'C'D'$, kde $O \in BC \wedge |BC| = 2|OC|$.

2. Zobrazenie Z vznikne skladaním osových súmernosti S_1 o S_2 v tomto poradí:

   Súmernosť S_1 je určená priamkou $y = 0$, súmernosť S_2 priamkou $y = x$. Určte výsledné zobrazenie Z. V zobrazení Z určte obrazy nasledujúcich útvarov:

   a) priamky p: $x = 2$
   b) bodu R[3; – 3]
   c) krivky k: $(x-4)^2+y^2 = 4$

3. Daný je rovnobežník ABCD, v ktorom platí $|AB| > |BC|$. Zobrazte daný rovnobežník v osových súmernostiach S určených priamkami:

   a) $\overleftrightarrow{BC}$ b) $\overleftrightarrow{AC}$ c) čo vzniká zložením osových súmerností $S_1(\overleftrightarrow{BC})$ o $S_2(\overleftrightarrow{AC})$.

4. V súmernosti podľa stredu S sa bod A[2; – 4] zobrazí do bodu A'[4; 4]. Určte súradnice stredu súmernosti S a v uvažovanej stredovej súmernosti zobrazte dané útvary:

   a) k: $(x-1)^2+(y-2)^2 = 4$
   b) q: $x+y+3 = 0$

5. Daná je kružnica k: $x^2+y^2 - 9x - 2y - 14 = 0$. Zobrazte danú kružnicu v osových súmernostiach určených

   a) osou x
   b) osou y
   c) osou I. a III. kvadrantu.

6. Na priamke $x+2y - 5 = 0$ nájdite bod, ktorý má od priamky $3x - 4y - 5 = 0$ vzdialenosť $v = 2$.

7. Nájdite rovnicu kružnice súmernej s kružnicou $(x-1)^2+(y-2)^2 = 1$ vzhľadom na priamku $x - y - 3 = 0$.

8. Dané sú 2 rôznobežky p, q a bod C, ktorý na nich neleží. Zostrojte všetky rovnostranné trojuholníky ABC tak, aby bod $A \in p \wedge B \in q$.

9. Dané sú 2 rôznobežky p, q a bod S, pre ktorý platí $S \notin p \wedge S \notin q$. Zostrojte všetky štvorce KLMN so stredom S tak, aby $K \in p \wedge M \in q$.

24. B Riešenie rovníc metódou substitúcie.

1. Metódou substitúcie riešte v *R* rovnice:

   a) $x^4 - 14x^2 + 45 = 0$

   b) $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$

   c) $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - 3\frac{x-1}{x+1} - 4 = 0$

   d) $(x+\sqrt{2x}+1).(x+\sqrt{2x}-1) = 15$

   e) $\sqrt[3]{\frac{4-x}{5+x}} + \sqrt[3]{\frac{5+x}{4-x}} = \frac{5}{2}$

2. Vhodnou substitúciou riešte v *R* rovnice:

   a) $3^x + 3^{3-x} = 28$

   b) $9^x - 25.3^x - 54 = 0$

   c) $3^{4x} - 72.3^{2x} - 729 = 0$

3. Metódou substitúcie riešte v *R* rovnice:

   a) $\log^2 x - \log x^4 + 3 = 0$

   b) $x^{1+\log x} = 10^6$

   c) $\log x^2 - \frac{1}{\log x} + 1 = 0$

   d) $x^{\log x} - \log 10 = 10(1 - x^{-\log x})$

4. Metódou substitúcie riešte v *R* rovnice:

   a) tg $(2x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$

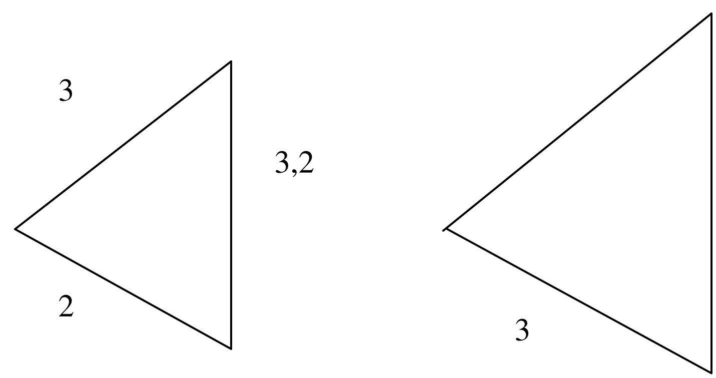
   b) 2. sin $(3x - \frac{\pi}{3}) = -1$

   c) $2.\sin^2 x + \sin x = 1$

   d) tg x + $\sqrt{3}$ cotg x = $\sqrt{3}$ + 1

25. A Podobné zobrazenia v rovine. Podobnosť trojuholníkov a mnohouholníkov.

1. Dvojmetrová zvislá tyč vrhá tieň v dĺžke 7,5 dm. Súčasne bol odmeraný tieň stromu, ktorého dĺžka je 120 cm. Aký vysoký je strom?
2. Pre ΔABC a ΔKBL platí: $\Delta ABC \sim \Delta KBL$, kde A[1; 2], B[4; 1], K[3; – 1]. Určte pomer obvodov a pomer obsahov týchto trojuholníkov.
3. Dané sú 2 nesústredné kružnice $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$ a bod M, ktorý leží vo vonkajšej oblasti obidvoch kružníc. Zostrojte všetky rovnoramenné trojuholníky KLM so základňou KL tak, aby $K \in k_1 \wedge L \in k_2 \wedge$ veľkosť uhla KML = 45°.
4. Daný je všeobecný ΔABC. Do tohto trojuholníka vpíšte štvorec KLMN tak, aby $KL \subset AB$, $M \in BC$, $N \in AC$.
5. Na obrázku je dvojica podobných trojuholníkov. Vypočítajte dĺžky chýbajúcich strán.



6. Na obrázku sú časti dvoch trojuholníkov. Jeden má stranu dlhú 4 a veľkosti uhlov k nej priľahlých sú 65° a 85°. O druhom z nich vieme, že oproti uhlu s veľkosťou 30° leží strana s dĺžkou 5. Uhol priľahlý k tejto strane má veľkosť 85°. O týchto dvoch trojuholníkoch môžeme s istotou tvrdiť, že

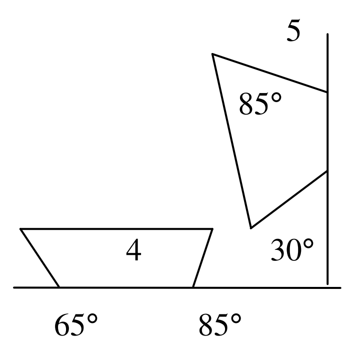
   A sú zhodné

   B sú podobné, ale nie sú zhodné

   C sú zhodné, ale nie sú podobné

   D nie sú podobné

   E nemožno rozhodnúť, pokiaľ nevidíme celé trojuholníky



7. Rovnoramenný lichobežník rozdeľujú uhlopriečky na štyri trojuholníky. Ktoré z týchto trojuholníkov sú podobné a ktoré sú zhodné?
8. Rovnobežky so stranami rovnobežníka idúce zvoleným bodom na uhlopriečke rozdeľujú daný rovnobežník na štyri rovnobežníky. Tie dva rovnobežníky, ktorými prechádza uhlopriečka, sú podobné, zvyšné majú rovnaký obsah. Dokážte to!
9. Nádoba má tvar zrezaného rotačného kužeľa s priemermi podstáv d_1 = 16 dm, d_2 = 8 dm a výška nádoby je 5 dm. Koľko litrov vody sa približne do nádoby zmestí?

25. B Základy teórie čísel. Operácie v rôznych číselných oboroch. Určovanie D(a, b), n(a, b). Odmocnina v R a C.

1. Určte $\sqrt[4]{8-i8\sqrt{3}}$
2. Riešte rovnicu $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ v R a C.
3. Rozkladom na súčin riešte v C rovnicu $x^4+9x^2 - x^3 - 9x = 6x^2+54$.
4. Dané sú výrazy $A(x) = x^4 - 1$, $B(x) = x^4 - x^3+x^2 - x$. Určte najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok výrazov $A(x)$, $B(x)$.
5. Určte delitele čísel 528, 396. Čomu sa rovná najväčší spoločný deliteľ, teda D(528, 396)?
6. Vhodnou metódou určte najväčšie spoločné delitele a najmenšie spoločné násobky čísel 48, 120.
7. Dané sú iracionálne čísla a = $\sqrt{1-0{,}5\sqrt{1-0{,}25^2}}+\sqrt{1+0{,}5\sqrt{1-0{,}25^2}}$, b = $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$. Určte $\dfrac{1}{a}$ a ukážte, že a = b.
8. Riešte v C (množine komplexných čísel):

   a) $c^2 + 1 = 0$ b) $2d^2 + 10 = 0$
   c) $e^2 + 4e + 5 = 0$ d) $4f^2 - 8f + 5 = 0$
9. Určte $a\in Q$ tak, aby sa zlomok $\dfrac{2x^3-x^2-8x+4}{x^3+a}$ dal krátiť.
10. Upravte

    a) $\dfrac{2\sqrt{4-\sqrt{8}}}{\sqrt{8+2\sqrt{8}}-\sqrt{8-2\sqrt{8}}}$

    b) $\left[\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^{-1}\right]^{-3}+\left[\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}\right)^{-1}\right]^{-3}$

    c) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{10}+\sqrt{15}}$

26. A Pojem pravdepodobnosť. Druhy pravdepodobnosti, výpočet pravdepodobnosti.

1. Z debny, v ktorej je 10 súčiastok a 3 z nich sú chybné, vyberieme náhodne 5 súčiastok. Aká je pravdepodobnosť, že medzi nimi budú práve 3 chybné?
2. Z debny, v ktorej je 10 súčiastok a 3 z nich sú chybné, vyberieme náhodne 5 súčiastok. Aká je pravdepodobnosť, že medzi nimi budú najviac 2 chybné?
3. V triede je 30 žiakov. Sedem z nich nemá domácu úlohu. Učiteľ vyvolá náhodne 6 žiakov. Aká je pravdepodobnosť, že aspoň 4 z nich vypracovali domácu úlohu?
4. Hádžeme trikrát kockou. Aká je pravdepodobnosť, že prvýkrát padne párne číslo, druhýkrát číslo väčšie ako 4 a tretíkrát nepárne číslo?
5. Automat na cestovné lístky sa pokazil. V polovici prípadov po vhodení mince nevypadne z neho nič. V desatine prípadov vypadne späť koruna aj s cestovným lístkom. V ostatných prípadoch s rovnakou pravdepodobnosťou vypadne cestovný lístok, ale koruna nie, resp. vypadne koruna, ale nie cestovný lístok. Aká je pravdepodobnosť toho, že po vhodení mince vypadne z automatu cestovný lístok alebo cestovný lístok i koruna?
6. V obchodnom dome majú zo 100 televízorov prvej akosti a 15 druhej akosti. Prvých desať kupujúcich dostalo televízor prvej akosti. Aká je pravdepodobnosť, že jedenástemu kupujúcemu predvedú televízor druhej akosti?
7. Aká je pravdepodobnosť, že zo skupiny 7 študentov aspoň dvaja majú narodeniny v ten istý deň?
8. Strelec strieľa so spoľahlivosťou (čiže s pravdepodobnosťou zásahu) 0,9. Aká je pravdepodobnosť, že zasiahne cieľ dvakrát za sebou?
9. Je pri hode 3 kockami pravdepodobnejší súčet 11 (jav A), či súčet 12 (jav B)?

26. B Goniometrické funkcie - Definícia funkcií tangens, kotangens, vlastnosti, grafy.

1. Určte hodnotu výrazu $\dfrac{\sin\left(-\dfrac{17}{3}\pi\right).\mathrm{tg}\,\dfrac{9}{4}\pi}{\cos\dfrac{7}{6}\pi.\mathrm{cotg}\,(-300°)}$

2. Pre ktoré hodnoty argumentu x platí f(x) = 0, ak $f : y = 2\mathrm{tg}\, x - \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

3. Určte počet koreňov rovnice $2\sin x = \sqrt{3}$ tg x v intervale <0; 2π).

4. Overte pravdivosť výroku:

   Ak $\sin x = \dfrac{2}{3}$ a $\mathrm{tg}\, x = \dfrac{1}{3}$, potom hodnota 2 cos x je z intervalu <0; 6>.

5. Načrtnite graf funkcie $f : y = \dfrac{\mathrm{tg}\, x}{|\mathrm{tg}\, x|}$.

6. Určte cos x, sin x, cotg x ak $\mathrm{tg}\, x = \dfrac{5}{12}$ a $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

7. Určte cos x, sin x, cotg x ak sin $x = -\dfrac{3}{5}$, $x \in \left(\pi; \dfrac{3}{2}\pi\right)$.

8. Vypočítajte: $\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{cotg}\,\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{tg\dfrac{\pi}{6} - \cot g\dfrac{5\pi}{6}}{tg\dfrac{4\pi}{3}} + \cot g\dfrac{7\pi}{6}$

9. Dokážte, že pre všetky prípustné hodnoty platí:

   $$\frac{1+tg^2 x}{1+\cot g^2 x} = tg^2 x$$

   $$\frac{2tgx}{\sin 2x} = 1 + tg^2 x$$

27. A Základy matematickej štatistiky – modus, medián, smerodajná odchýlka.

1. V tabuľke je uvedený počet obyvateľov v našej republike v rokoch 1974 – 1978 a počet živo narodených detí v jednotlivých rokoch:

	1974	**1975**	**1976**	**1977**	**1978**
Počet obyvateľov	14 685 775	14 801 667	14 917 672	15 030 583	15 138 188
Počet novorodencov	291 800	289 425	287 192	281 722	278 250

Vypočítajte priemerný počet narodených detí v jednom roku, a vypočítajte počet narodených detí na 1000 obyvateľov v jednotlivých rokoch a priemer tejto hodnoty.

2. V nasledujúcej tabuľke sú uvedené počty pracovníkov s vysokoškolským vzdelaním v jednotlivých vekových kategóriách:

Vek	**22,5**	**27,5**	**32,5**	**37,5**	**42,5**	**47,5**	**52,5**	**57,5**	**62,5**
Počet pracovníkov	1 223	5 607	6 109	6 159	4 836	2 645	1 057	997	754

Vypočítajte modus, medián a aritmetický priemer veku pracovníkov s vysokoškolským vzdelaním.

3. Vypočítajte aritmetický priemer čísel x_1, x_2, x_3, ... x_{15}, ak sa číslo 2 vyskytuje medzi nimi 5krát, číslo 7 sa vyskytuje 8krát a čísla 10 a 12 raz. Vypočítajte aj smerodajnú odchýlku opísaného znaku.
4. Výkon gymnastky na bradlách ohodnotilo 5 rozhodcov týmito známkami: 9,1; 9,5; 8,9; 9,2; 9,2. Aké je jej priemerné hodnotenie vypočítané z troch prostredných známok (najvyššia a najnižšia známka sa do hodnotenia nezapočitáva)?
5. Pri opakovaných meraniach istej fyzikálnej veličiny sme dostali tieto výsledky:

   2,11; 2,01; 2,09; 2,11; 2,02; 2,03; 2,10; 2,05; 2,05. Vypočítajte priemer a smerodajnú odchýlku tohto merania.

6. V šľachtiteľskom ústave náhodne vybrali z úrody jabĺk 50 kusov a zistili ich hmotnosť. Rozdelenie početnosti jabĺk je uvedené v tabuľke.

Hmotnosť (g)	Počet jabĺk
26 - 30	9
31 - 35	15
36 - 40	14
41 - 45	8
46 - 50	4

Vypočítajte priemernú hmotnosť jabĺk, modus, medián, rozptyl a smerodajnú odchýlku.

7. Pri príprave čajovej zmesi zmiešali 5 kg čaju v cene 150 Sk za kilogram a 15 kg čaju po 90 Sk za kilogram. Aká by mala byť cena 1 kg zmesi?

27. B Zhodné zobrazenia v rovine. Posunutie a otočenie. Skladanie zhodných zobrazení.

1. Daný je lichobežník ABCD. V určených zobrazeniach načrtnite obrazy útvarov:
   a. v posunutí T určenom dvojicou bodov [A; C] zobrazte BD:

      $\overrightarrow{BD} \xrightarrow{T} \overrightarrow{B'D'}$

   b. v otáčaní R určenom R(C; $-\frac{2}{3}\pi$) zobrazte

      $DA \xrightarrow{R} D'A'$

2. Posunutie T je dané [A; B], kde A[0; 1], B[0; 3]. V uvažovanom zobrazení T určte obrazy nasledujúcich útvarov:
   a. priamky $q: y = \sqrt{3}x + 2$
   b. úsečky CD, kde C[– 1; – 2], D[2; 1]
   c. krivky $y = 4(x-3)^2+2$
3. Na priamke x+2y – 5 = 0 nájdite bod, ktorý má od priamky 3x – 4y – 5 = 0 vzdialenosť v = 2.
4. Dané sú 2 rôznobežky p, q a bod C, ktorý na nich neleží. Zostrojte všetky rovnostranné trojuholníky ABC tak, aby bod $A \in p \wedge B \in q$.
5. Dané sú 2 rôznobežky p, q a bod S, pre ktorý platí $S \notin p \wedge S \notin q$. Zostrojte všetky štvorce KLMN so stredom S tak, aby $K \in p \wedge M \in q$.

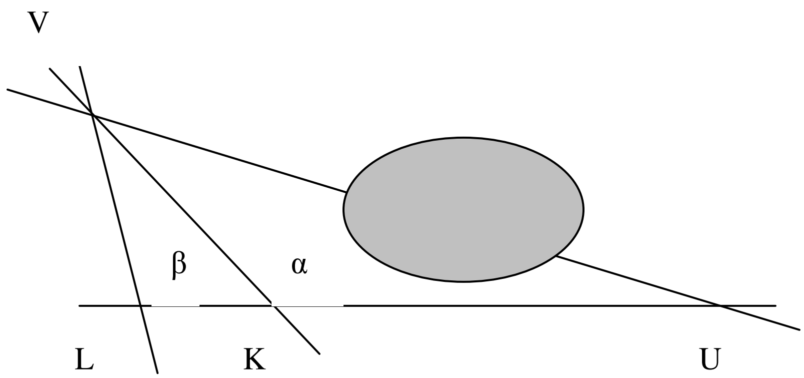
28. A Sínusová veta a jej použitie.

1. Dve priame cesty sa križujú a zvierajú uhol $\alpha = 53^\circ$. Na jednej z nich stoja dva stĺpy, jeden na križovatke, druhý vo vzdialenosti 500m od nej. Ako ďaleko treba ísť od križovatky po druhej ceste, aby sme videli oba stĺpy v zornom uhle $\beta = 15^\circ$?
2. V trojuholníku *ABC* je $b = 8{,}4$ cm, $c = 6{,}9$ cm, $\alpha = 56°$. Vypočítajte veľkosť strany *a.*
3. Určte dĺžky všetkých strán a veľkosti všetkých uhlov trojuholníka *ABC*, ak je dané: $a = 11{,}6$ dm, $c = 9$ dm, $\alpha = 65°30'$.
4. Vypočítajte veľkosť najväčšieho vnútorného uhla trojuholníka, ak jeho strany majú dĺžku:

   a) 43 mm, 47 mm, 50 mm b) $2a,\ \frac{3}{2}a,\ 3a\ \ (a > 0)$
5. Rozhodnite, či trojuholník *ABC*, ktorého strany sú
   a) $a = 4$ cm, $b = 3$ cm, $c = 6$ cm
   b) $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm
   c) $a = 11$cm, $b = 14$ cm, $c = 18$ cm

   je tupouhlý.
6. Vrchol veže, ktorá stojí na rovine, vidíme z určitého miesta A vo výškovom uhle $\alpha = 39^\circ$. Ak sa priblížime smerom k jeho päte o 50m na miesto B, vidíme z neho vrchol veže vo výškovom uhle $\beta = 58^\circ$. Ako vysoká je veža?
7. Na vrchole hory stojí hrad, ktorý má vežu vysokú v = 30m. Križovatku ciest v údolí vidíme z vrcholu veže a od jej päty v hĺbkových uhloch 32˚ a 30˚. Ako vysoko je vrchol hory nad križovatkou?
8. Z vrchu kostolnej veže vidno kostolnú bránu a poštovú schránku, akoby ležali na jednej priamke. Brána je 65 metrov od základov veže a hĺbkový uhol je 60˚ od vrcholu veže. Hĺbkový uhol od vrcholu veže ku schránke je 18˚. Vypočítajte vzdialenosť medzi bránou a schránkou.
9. Loď pláva z bodu A 4,5 km na smerníku 072˚ smerom k bodu B. Od bodu B loď pláva na smerníku 134˚ do bodu C. C je 6 km východne vzdialený od bodu A. Vypočítajte, ako ďaleko loď plávala od bodu B ku bodu C.
10. Muž výšky 1,6 m stojí na veži. Z tejto pozície vid loptu, ktorá je vo vzdialenosti 30 m od základov veže. Uhol sklonu k lopte je 62˚. Vypočítajte výšku veže.

11. Treba určiť vzdialenosť miest U a V, ktoré sú oddelené rybníkom. Od U sa preto vytýčila priama trasa so stanovišťami K a L (viď obr.) a namerali sa tieto údaje: $\alpha = 115^\circ$, $\beta = 104^\circ$, $|UK| = 110m$, $|KL| = 65m$.

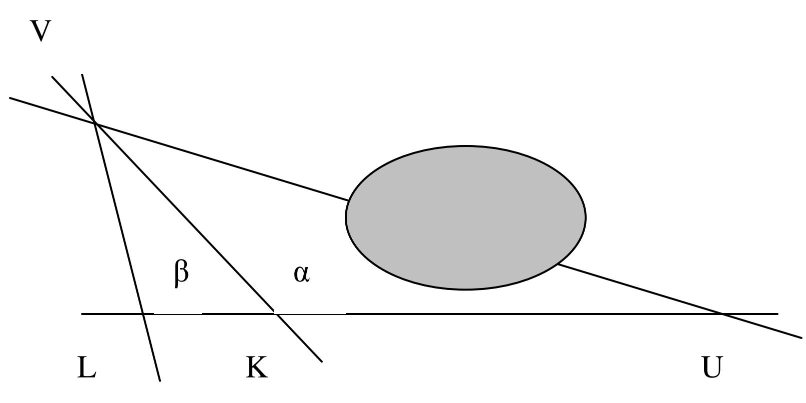


28. B Podobné zobrazenia v rovine. Rovnoľahlosť ako podobné zobrazenie, rovnoľahlosť kružníc.

1. Dané sú kružnice $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$, kde $S_1 \neq S_2 \wedge r_1 > r_2$. Úsečka AB je tetivou kružnice k_1. Zostrojte tetivu A'B' kružnice k_2 tak, aby úsečky AB, A'B' boli navzájom rovnoľahlé.
2. V rovnoľahlosti so stredom S[0; 2] a koeficientom h = – 3 určte obrazy nasledujúcich útvarov:
   a) bodu A[0; 3]
   b) priamky p: $y = -2x+1$
   c) kružnice k: $(x-1)^2+(x-2)^2 = 4$
3. Nasledujúcim výrokom prideľte pravdivostnú hodnotu:
   a) Pre každé 2 trojuholníky platí: ak sú podobné, potom sú aj rovnoľahlé.
   b) Existujú 2 rôzne kružnice, ktoré majú práve jeden stred rovnoľahlosti.
   c) Pre každé 2 kružnice platí: ak existuje ich stred rovnoľahlosti, potom existuje spoločná dotyčnica týchto 2 kružníc a stred jej rovnoľahlosti je jej prvkom.
4. Rozoberte všetky možnosti rovnoľahlosti 2 kružníc.
5. Dané sú 2 nesústredné kružnice $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$ a bod M, ktorý leží vo vonkajšej oblasti obidvoch kružníc. Zostrojte všetky rovnoramenné trojuholníky KLM so základňou KL tak, aby $K \in k_1 \wedge L \in k_2 \wedge$ veľkosť uhla KML = 45°.
6. Dané sú 2 rôznobežky p, q a bod A, pre ktorý platí $A \notin q$. Zostrojte všetky kružnice k prechádzajúce bodom A a dotýkajúce sa priamok p, q.
7. Daná je priamka p, kružnica k tak, že $p \cap k = \emptyset$ a mimo nich bod A. Zostrojte všetky úsečky XY, pre ktoré platí: $X \in p$, $Y \in k$ a bod A delí úsečku XY tak, že $|AY| = 3|AX|$.

29. A Kosínusová veta a jej použitie.

1. Dve priame cesty sa križujú a zvierajú uhol $\alpha = 53^\circ$. Na jednej z nich stoja dva stĺpy, jeden na križovatke, druhý vo vzdialenosti 500m od nej. Ako ďaleko treba ísť od križovatky po druhej ceste, aby sme videli oba stĺpy v zornom uhle $\beta = 15^\circ$?
2. Vrchol veže, ktorá stojí na rovine, vidíme z určitého miesta A vo výškovom uhle $\alpha = 39^\circ$. Ak sa priblížime smerom k jeho päte o 50m na miesto B, vidíme z neho vrchol veže vo výškovom uhle $\beta = 58^\circ$. Ako vysoká je veža?
3. Na vrchole hory stojí hrad, ktorý má vežu vysokú v = 30m. Križovatku ciest v údolí vidíme z vrcholu veže a od jej päty v hĺbkových uhloch 32° a 30°. Ako vysoko je vrchol hory nad križovatkou?
4. Z vrchu kostolnej veže vidno kostolnú bránu a poštovú schránku, akoby ležali na jednej priamke. Brána je 65 metrov od základov veže a hĺbkový uhol je 60° od vrcholu veže. Hĺbkový uhol od vrcholu veže ku schránke je 18°. Vypočítajte vzdialenosť medzi bránou a schránkou.
5. Loď pláva z bodu A 4,5 km na smerníku 072° smerom k bodu B. Od bodu B loď pláva na smerníku 134° do bodu C. C je 6 km východne vzdialený od bodu A. Vypočítajte, ako ďaleko loď plávala od bodu B ku bodu C.
6. Treba určiť vzdialenosť miest U a V, ktoré sú oddelené rybníkom. Od U sa preto vytýčila priama trasa so stanovišťami K a L (viď obr.) a namerali sa tieto údaje: $\alpha = 115^\circ$, $\beta = 104^\circ$, $|UK| = 110m$, $|KL| = 65m$.



7. Telesová uhlopriečka kvádra má dĺžku u = 10 cm a zviera s rovinou podstavy kvádra uhol $\alpha = 60^\circ$. Taký istý uhol zvierajú uhlopriečky podstavy. Určte objem kvádra.

29. B Riešenie kvadratických rovníc s parametrom. Riešenie sústav rovníc s parametrom.

1. Riešte v R rovnicu s reálnym parametrom b:

$$\frac{2xx}{x+b}-\frac{x}{b-x}=\frac{b^2}{4\left(x^2-b^2\right)}$$

2. Riešte v R rovnicu s reálnym parametrom n:

$$\frac{x^2+1}{n^2x-2n}-\frac{1}{2-nx}=\frac{x}{n}$$

3. Urobte úplnú diskusiu riešenia rovnice s reálnym parametrom m a neznámou *x*.

   $(m – 2)x^2 – (3m + 6)x + 6m = 0$

4. Určte pre ktoré hodnoty parametra $q\in R$ je priamka $y = x+q$ sečnicou elipsy $x^2+2y^2 = 6$.

5. Riešte rovnicu s neznámou x a parametrom m: $(m + 3) x^2 + (2m + 3) x + m + 4 = 0$

6. Nájdite všetky reálne čísla a tak, aby kvadratická rovnica nemala reálne korene: $(a^2 – 1) x^2 + 2 (a – 1) x + 2 = 0$

7. Určte $p\in R$ tak, aby sa jeden z koreňov sústavy rovnal 1. Koľko riešení má úloha?

$$\begin{aligned} x+y+z&=p\\ 2x-2y+z&=p+1\\ x-2y-z&=p+5 \end{aligned}$$

8. Určte a, b, c $\in$ R tak, aby sústavy rovníc mali rovnaké riešenie:

$$\begin{aligned} 2x+3y-z&=18 \qquad & 3x-2y+z&=8\\ x+y+z&=a & x+2y+z&=24\\ 3x+by-2z&=0 & 2x+3y-z&=c \end{aligned}$$

9. Určte s $\in$ R tak, aby súčet koreňov sústavy bol 2:

$$\begin{aligned} 2x+y+z&=0\\ 3x-2y+z&=-5\\ sx+y-2z&=1 \end{aligned}$$

10. V *R* x *R* riešte sústavu rovníc s parametrom $a\in R$:

$$\frac{x+y}{y}=a, \qquad 1+\frac{xy}{a+1}=a^2$$

11. Určte všetky $[x, y] \in R \times R$, pre ktoré platí $ax + y = 1$ a zároveň $x + ay = 1$, ak parameter $a \in R$.

12. V $R \times R \times R$ riešte sústavu rovníc s parametrom $a \in R$:

$$2x + 9y + 2z = 7a - 4$$
$$3x + 3y + 4z = 3a - 6$$
$$4x - 6y + 2z = -a - 8$$

13. V $R \times R \times R$ riešte sústavu rovníc s parametrom $a \in R$:

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \end{aligned}$$

30. A Pojem určitého integrálu a jeho aplikácie. Výpočet objemov a povrchov rotačných telies.

1. Trojuholník ABC má vrcholy A[1; – 2], B[2; 3], $C \in p$, pričom p: $2x + y - 2 = 0$. Obsah trojuholníka je 8. Určte súradnice bodu C.
2. Trojuholník je ohraničený grafom funkcie f: $y = x$, osou x a priamkou A[2; 2], B[0; 3]. Určte jeho obsah a obvod.
3. Určte obsah trojuholníka ohraničeného krivkami $y = x$, $5x - 3y - 10 = 0$ a osou x.
4. Určte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou obrazca ohraničeného osou x a krivkou $y = 6x - x^2 - 5$ okolo osi x.
5. Odvoďte vzorec pre výpočet objemu rotačného kužeľa s polomerom $r>0$, výškou $v>0$. (Využite rotáciu okolo osi x.)
6. Priemer parabolického automobilového reflektora je 24 cm, hĺbka reflektora je 12 cm. Určte objem reflektora.
7. Vypočítajte obsah množiny ohraničenej krivkami $y = x^2 - 2x$; $y = x$.
8. Vypočítajte obsah útvaru ohraničeného krivkami $y = \sin x$, $y = \sin^2 x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.
9. Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou množiny ohraničenej krivkami $y = \frac{x^2}{4}$ a $y = \frac{x}{2} + 2$

30. B Princíp dôkazu matematickou indukciou. Aplikácie.

1. Dokážte Moivreovu vetu matematickou indukciou.
2. Dokážte binomickú vetu matematickou indukciou.
3. Dokážte, že $p = \frac{6^{2n} - 1}{35}$ je celé číslo pre každé $n \in N$.
4. Dokážte platnosť vzťahov $a_n = a_1 + (n - 1)d$, kde a_1 je prvý člen aritmetickej postupnosti, d je diferencia; $a_n = a_1.q^{n-1}$, kde a_1 je prvý člen geometrickej postupnosti, q je kvocient, pre výpočet n – tých členov týchto postupností ak $n \in N$.
5. V aritmetickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dokážte, že platia vzťahy:

   $a_n = a_1 + (n - 1)d$; $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
6. Odvoďte vzťah pre súčet konvergentného geometrického radu za predpokladu, že postupnosť súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ geometrických postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná.
7. Matematickou indukciou dokážte: $\forall n \in N : 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

   $\forall n \in N : 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$